Mat-1.1030 Matematiikan peruskurssi L3 **Eirola/Peltonen**
Tentti ja välikoeuusinnat 5.2.2011

1. välikokeen tehtävät 1-4.
2. välikokeen tehtävät 5-8.
3. välikokeen tehtävät 9-12.

Välikoe kestää 3 tuntia.

Tenttitehtävät: 1, 4, 5, 7, 10, 11. Tentti kestää 4 tuntia.

Laskimen käyttö ei ole sallittu

1. Tarkastellaan ehdon

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & \text{kun } z \neq 0 \\ 0, & \text{kun } z = 0 \end{cases}$$

määräämää funktiota f.
(a) Onko f jatkuva origossa?
(b) Pätevätkö Cauchy-Riemannin yhtälöt origossa?
(c) Onko f derivoituva origossa?
(d) Onko f analyyttinen origossa?

2. (a) Määrää lukujen i, i^2 ja $\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}$ kaikki logaritmit.
(b) Ovatko joukot $\frac{1}{2}\log \mathrm{i}$ ja $\log \mathrm{i}^{\frac{1}{2}}$ samat?
(c) Ovatko joukot $2\log \mathrm{i}$ ja $\log \mathrm{i}^2$ samat?
(d) Onko mahdollista määrätä analyyttinen funktio $f : z \mapsto \log z$ jossakin kompleksitason alueessa siten, että pätee $f(\mathrm{i}^2) = 2f(\mathrm{i})$ ja $f(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}f(\mathrm{i})$?

3. Olkoon γ yksikköympyrän parametrisoiva polku yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.
(a) Määrää integraalin

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\,\mathrm{d}z$$

arvo, kun a on reaalinen vakio.
(b) Määrää integraalin

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

arvo.

4. Olkoon $a \in \mathbb{R}$, $-1 < a < 1$.
(a) Muodosta funktion $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ Laurentin kehitelmä joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid |a| < |z| < \infty\}$.
(b) Määrää sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(n\theta)$$

summa kun $\theta \in \mathbb{R}$.
(c) Määrää sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin(n\theta)$$

summa, kun $\theta \in \mathbb{R}$.

5. Mitkä seuraavista joukoista V muodostavat K-kertoimisen vektoriavaruuden? Miksi?
   (a) V=K=$\mathbb{C}$ kompleksilukujen joukko. Varustetaan V tavallisella kompleksilukujen yhteenlaskulla ja määritellään skalaarilla kertominen (merk. $\odot$) asettamalla
   $$\alpha \odot x = \alpha^2 x, \quad \alpha \in K, \ x \in V.$$
   (b) $V = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{C}$. Varustetaan V tavallisella vektoreiden yhteenlaskulla (komponenteittain) ja määritellään skalaarilla kertominen asettamalla
   $$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, 0), \quad \alpha \in K, \ (x, y) \in V.$$
   (c) V on niiden yhden reaalimuuttujan reaalilukukertoimisten polynomien x kokoelma, jotka toteuttavat ehdon
   $$2x(0) = x(1).$$

6. Mitkä seuraavista kuvauksista ovat lineaarisia? Miksi?
   (a) $A : V \to V$, kun $V = \mathbb{R}^2$
   $$A(x, y) = (\alpha^2 x + \beta^2 y, \gamma^2 x + \delta^2 y), \ (x, y) \in V, \ \alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta \in \mathbb{R}.$$
   (b) $B : V \to V$, kun V on yhden reaalimuuttujan reaalilukukertoimisten polynomien muodostama vektoriavaruus ja
   $$B(p)(x) = p(x^2), \ p \in V, \ x \in \mathbb{R}.$$
   (c) $C : V \to \mathbb{R}$, kun V on jatkuvien yhden reaalimuutujan reaalilukuarvoisten funktioiden muodostama vektoriavaruus ja
   $$C(f)(x) = \int_{-1}^{1} f(y)(x - y)^2 \mathrm{d}y.$$

7. Olkoot V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $A : V \to V$ lineaarinen kuvaus.
   (a) Osoita, että jos pätee $A^2 - A + I_V = 0$, niin A on kääntyvä. Tässä I_V on identtinen kuvaus: $I_V x = x$ kaikilla $x \in V$.
   (b) Jos V on enintään astetta $n \geq 1$ olevien reaalipolynomien muodostama vektoriavaruus ja $A : V \to V$ ehdon $(Ax)(t) = x(t+1) - x(t)$ määräämä kuvaus, niin onko A kääntyvä?

8. Olkoon V enintään astetta $n \geq 1$ olevien reaalipolynomien muodostama vektoriavaruus varustettuna sisätulolla
   $$< x, y >= \int_0^1 x(t) y(t) \mathrm{d}t.$$
   (a) Onko ehdon $(Ax)(t) = x(-t)$ määräämä lineaarikuvaus $A : V \to V$ itseadjungoitu?
   (b) Onko tavallinen yhden reaalimuuttujan derivointi $D : V \to V$ itseadjungoitu?
   (c) Ovatko a) tai b)-kohdan kuvaukset isometrioita?

9. Näytä, että $e^{(A^*)} = (e^A)^*$.
Näytä myös että, jos A on vinohermiittinen: $A^* = -A$, niin e^A on unitaarinen.

10. Etsi suurin mahdollinen α ja pienin mahdollinen μ siten, että kaikilla $t > 0$ pätee $e^{t\alpha} \leq \|e^{tA}\| \leq e^{t\mu}$, kun
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. Etsi systeemin
$$\begin{cases} x_1' = x_1(6 - x_1 - 2x_2) \\ x_2' = x_2(4 - x_1 - x_2) \end{cases}$$
tasapainopisteet ja linearisoi systeemi näissä. Minkä laatuisia lineaariset systeemit ovat? Voidaanko tämän perusteella päätellä alkuperäisen systeemin käyttäytyminen tasapainopisteitten ympäristössä? Piirrä kuva.

12. Laske Heunin menetelmän
$$\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}_j + \tfrac{h}{2}[\boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{x}_j) + \boldsymbol{f}(t_j + h, \boldsymbol{x}_j + h\boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{x}_j))]$$
stabiilisuusalue.