

Maanantai 12.12. 2011.

Kirjoita paperiin nimesi ja muut tarvittavat tiedot.

Kuten aina, perustele vastauksesi huolella.

1) (6p.) a. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Laske e^A .

b. Olkoon B kokoa $n \times n$. Näytä, että jos B on diagonalisoituva, niin pätee $e^{B(t+s)} = e^{Bt}e^{Bs}$ kaikilla $t, s \in \mathbb{R}$.

2) (6p.) Ratkaise

$$x'(t) = Ax(t) + b(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\text{alkuehdolla } x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3) (6p.) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$x'(t) = Ax(t) = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Näytä, että $(0, 0, 0)$ on keskus, ts. $\|x(t)\|$ on vakio t :n suhteen. (Vihje: derivoi $\|x(t)\|^2$ t :n suhteen.)

4) (6p.) Tarkastellaan kaksiaskelmenetelmää

$$x_{j+2} + \alpha_0 x_j = h(\beta_1 f_{j+1} + \beta_0 f_j)$$

a. Onko menetelmä eksplisiittinen vai implisiittinen?

b. Mikä on suurin kertaluku, joka voidaan saavuttaa sopivilla $\alpha_0:n, \beta_1:n$ ja $\beta_0:n$ valinnoilla?

c. Onko menetelmä stabiili?