Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu — Alestalo/Pulkkinen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

2. välikoe 29.3.2011 klo 16–19.

Ei laskimia eikä taulukoita.

1. a) Olkoon $u\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ harmoninen funktio. Millä vakioiden $a, b \in \mathbf{R}$ arvoilla funktio
$$U(x,y) = u(ax, by)$$
on harmoninen?
b) Olkoon $v\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ harmoninen funktio. Millä vakion $c \in \mathbf{R}$ arvolla funktio
$$V\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad V(x,y) = v(3x+4y, 4x+cy),$$
on harmoninen?

2. Tarkastellaan epähomogeenista lämpöyhtälöä
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 12x(1-x), & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$
Tarkoituksena on osoittaa, että ongelman ratkaisu lähestyy tasapainotilaa.
a) Määritä yhtälölle ajasta riippumaton tasapainoratkaisu $u_\infty(x)$, joka toteuttaa $\partial u_\infty/\partial t \equiv 0$ ja reunaehdot $u_\infty(0) = u_\infty(1) = 0$.
b) Osoita funktiota $u - u_\infty$ tutkimalla, että alkuarvotehtävän ratkaisulle $u(x,t)$ pätee $u(x,t) \leq u_\infty(x)$ kaikilla $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$.
c) Osoita, että
$$u(x,t) \geq (1 - e^{-t})u_\infty(x), \quad 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0.$$
Vihje b-c: $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1) \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$.

3. Tarkastellaan aaltoyhtälöä $u_{tt} = \Delta u$ arvoilla $t > 0$ rajoitetussa alueessa $D \subset \mathbf{R}^n$, jonka reuna ∂D on sileä. Osoita, että ratkaisun u energia
$$E(t) = \frac{1}{2}\int_D \left(u_t(x,t)^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) dx$$
on vakio, kun reunaehtona on $u(x,t) = 0$ kaikilla $x \in \partial D$, $t > 0$.
Huom: Jos tehtävä tuntuu hankalalta, voit saada 3 pistettä ratkaisemalla tapauksen $n = 1$, jossa $\nabla u = u_x$.

4. Määritä funktionaalin
$$I(y) = \int_0^1 \left(y(x)^2 + y'(x)^2\right) dx$$
ekstremaalit, kun reunaehtoina on $y(0) = 0,\ y(1) = 1$.

Sekalaisia kaavoja:

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS, \quad \int_D (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n}\, dS.$$