Matematiikka
Aalto-yliopisto
Arponen/Pulkkinen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

3. välikoe 16.5.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} 1, & -L/2 \le x \le L/2 \\ 0, & L/2 < |x| \le L. \end{cases} \tag{1}$$
   (a) Laske sen koko (reaalinen) Fourier-sarja. Onko suppeneminen tasaista tarkasteluvälillä $[-L, L]$?
   (b) Mihin sarja suppenee kun $x = \pm L$?
   (c) Kuinka nopeasti σ_N^2 pienenee?

2. Diskretoi (keskeis)differenssimenetelmällä Dirichlet-Neumann reuna-arvotehtävä
$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$
   jossa $q > 0$ ja f jatkuva.

3. Kun yksidimensioinen lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ on diskretoitu paikkamuuttujan suhteen, on saatu tavallinen differentiaaliyhtälö $u_h'(t) = \Delta_h u_h(t)$, missä Δ_h:n ominaisarvojen tiedetään olevan välillä $(-4/h^2, 0)$. Olkoon $\theta \in [0,1]$ ja tarkastellaan aikadiskretointia "$\theta-$perheellä"
$$\boldsymbol{u}_h^{k+1} = \boldsymbol{u}_h^k + \delta\, \boldsymbol{\Delta}_h \left((1-\theta)\boldsymbol{u}_h^k + \theta \boldsymbol{u}_h^{k+1}\right).$$
   Millä arvoilla $\delta > 0$, $\theta \in [0,1]$, $h > 0$ näin diskretoitu systeemi on stabiili?

4. (a) Kirjoita tehtävälle
$$\begin{cases} -u''(x) + xu(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 1, \end{cases}$$
   variaatioformulaatio.
   (b) Muodosta vastaava Galerkin-approksimaatio-probleema funktioiden $v_1(x) = x$, $v_2(x) = x^2$ virittämässä aliavaruudessa. Huom: tämän tulosta ei tarvitse kuitenkaan ratkaista.

Mathematics
Aalto University

Arponen/Pulkkinen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

3. midterm exam 16.5.2011

Please fill in clearly *on every sheet* the data on you and the examination. On *Examination code* mark course code, title and text mid-term or final examination. Degree Programmes are ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Calculators: same as in the Finnish Matriculation Exam are allowed. Time for the exam is 3 hours.

1. Let

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -L/2 \leq x \leq L/2 \\ 0, & L/2 < |x| \leq L. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Calculate the full (real) Fourier series of f. Is the series converging uniformly on $[-L, L]$?

   (b) Where to does it converge at $x = \pm L$?

   (c) How fast is σ_N^2 decreasing?

2. Discretize with the central difference method the Dirichlet-Neumann boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(x) + qu(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   where $q > 0$ and f continuous.

3. When the 1-dimensional heat equation $u_t = u_{xx}$ has been discretized with respect to the spatial variable, we have an ordinary differential equation $u_h'(t) = \Delta_h u_h(t)$, where the eigenvalues of Δ_h are known to lie in the interval $(-4/h^2, 0)$. Let $\theta \in [0,1]$ and examine the time discretization with so called $\theta-$family

$$\boldsymbol{u}_h^{k+1} = \boldsymbol{u}_h^k + \delta\, \boldsymbol{\Delta}_h \left((1-\theta)\boldsymbol{u}_h^k + \theta \boldsymbol{u}_h^{k+1}\right).$$

   With what values of $\delta > 0$, $\theta \in [0,1]$, $h > 0$ this method is stable?

4. (a) Write the variational form for the problem

$$\begin{cases} -u''(x) + xu(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 1. \end{cases}$$

   (b) Formulate the corresponding Galerkin-approximation problem in the subspace spanned by $v_1(x) = x$, $v_2(x) = x^2$. NB: you don't need to solve this Galerkin problem.