Aalto-yliopisto
Matematiikan laitos
27.05.2011

Alestalo/Arponen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4, kevät 2011

Ei laskimia eikä taulukoita. Merkitse vastauspaperiin selvästi teetkö tentin vai uusitko yhden kolmesta välikokeesta.

Tentti: Valitse viisi (5) tehtävää seuraavista: 1.1, 1.4, 2.2, 2.4, 3.3, 3.4.

1. välikoe

1.1 Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on 2π-jaksollinen ja

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{kun } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{kun } x = 0 \text{ tai } x = \pi. \end{cases}$$

Määritä funktion f Fourier-sarja joko kompleksisessa tai reaalisessa muodossa.

1.2 Johda Fourier-muunnokseen ja konvoluutioon liittyvä kaava $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, kun $f, g \in L^1(\mathbf{R})$.

1.3 Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1/(1+x^2)$. Määritä funktion f Fourier-muunnos $\hat{f}(\xi)$
a) kohdassa $\xi = 0$, b) arvoilla $\xi > 0$.

1.4 Johda muuttujien separointia käyttämällä lämpöyhtälön $u_t = u_{xx}$, $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, yleinen ratkaisu reunaehdoilla $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ kaikilla $t \ge 0$.

2. välikoe

2.1 a) Olkoon $u\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ harmoninen funktio. Millä vakioiden $a, b \in \mathbf{R}$ arvoilla funktio $U(x,y) = u(ax, by)$ on harmoninen?
b) Olkoon $v\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ harmoninen funktio. Millä vakion $c \in \mathbf{R}$ arvolla funktio $V\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $V(x,y) = v(x+y, x+cy)$, on harmoninen?

2.2 a) Esitä Laplace-yhtälön ratkaisujen maksimiperiaate.
b) Olkoon $D \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu alue sekä $f\colon D \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \partial D \to \mathbf{R}$ jatkuvia. Osoita, että Dirichlet'n ongelmalla

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in D, \\ u(y) = g(y), & y \in \partial D, \end{cases}$$

on korkeintaan yksi ratkaisu $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$.

2.3 Johda aaltoyhtälön

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

ratkaisun Fourier-muunnokselle yhtälö $\hat{u}_{tt} + |\xi|^2 \hat{u} = 0$ ja sen avulla muunnoksen $\hat{u}(\xi, t)$ lauseke.

2.4 Määritä funktionaalin

$$I(u) = \int_1^2 \frac{(y')^2}{x^3}\, dx$$

ekstremaalit reunaehdoilla $y(1) = 0,\ y(2) = 3$.

3. välikoe

3.1 Olkoon $f(x) = \exp(-x^2/2)$. Tämän Fourier-muunnos on $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}\exp(-\xi^2/2)$ jota voidaan pitää kaistarajoitettuna: sovitaan katkaisutaajuudeksi $\xi_c = 4$.

(a) Laske $\hat{f}$:n approksimaatio h_N (Moniste "DFT ja Fourier-muunnos")

$$h_N(\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)e^{-\mathrm{i}x_j\xi}\Delta x, \quad \Delta x = 2a/N.$$

(b) Mikä on Nyquistin taajuus?

(c) Mikä pitäisi a:n olla vähintään?

3.2 Laske yhtälön

$$u_{tt} = \Delta u - au,$$

jossa $a > 0$ (vakio), vaihe- ja ryhmänopeudet. Onko yhtälö anisotrooppinen?

3.3 Aaltoyhtälön

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

diskretoinnissa eräällä 2-askelmenetelmällä päädyttiin systeemiin:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_h^{k+1} = 2\boldsymbol{u}_h^k - \boldsymbol{u}_h^{k-1} + c^2\delta^2\Delta_h \boldsymbol{u}_h \\ \boldsymbol{u}_h^0 = \boldsymbol{f}_h,\ \boldsymbol{u}_h^1 = (\boldsymbol{I} + \frac{c^2\delta^2}{2}\Delta_h)\boldsymbol{f}_h + \delta \boldsymbol{g}_h. \end{cases} \tag{1}$$

Millainen stabiiliusehto δ:lle näistä johdettiin? (Vihje: Δ_h:n ominaisvektoreista alkavien ratkaisujen (energian) ei tulisi kasvaa eikä vaimeta.)

3.4 Tarkastellaan reuna-arvotehtävää

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

jossa f jatkuva.

(a, 3p) Millainen on tehtävän variaatioformulaatio?

(b, 1p) Miten määritellään sen ratkaisun u Ritz-Galerkin approksimaatio u_h?

(c, 2p) Mitataan virhettä $u - u_h$ normilla

$$\|u - u_h\|^2 = \langle u' - u_h', u' - u_h'\rangle = \int_0^1 \left(u'(x) - u_h'(x)\right)^2 dx.$$

Osoita, että

$$\|u - u_h\|^2 = \|u\|^2 - \|u_h\|^2.$$

Geometrinen tulkinta?