S-114.1327 Fysiikka III (Est) 1. välikoe (Tittonen/Tulkki) 05.03.2012

Malliratkaisut:

1. a) Comptonin kokeessa voidaan huomata osan röntgen- tai gamma-säteilyn siroavan taaksepäin näytteestä (joka sisältää löyhästi sidoksissa olevia elektroneja) kasvaneella aallonpituudella.

Kokeessa siis fotonit epäelastisesti siroavat elektroneista. Comptonin yhtälö saadaan ratkaistua määräämällä, että energia ja liikemäärä säilyvät törmäyksessä.

b) Se osoitti, että valolla on myös hiukkasluonne eli se koostuu fotoneista, joilla on diskreetti energia eikä aalloista, joilla on jatkuva energia. Lisäksi se osoitti, että fotoneilla on liikemäärä aivan kuten massallisilla hiukkasilla.

2. a) Äärettömän kuopan tilan n energia

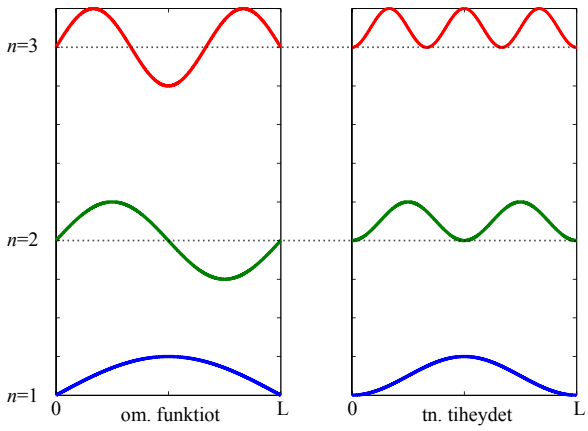
$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$$

Energiaerotus perustilan $n = 1$ ja ensimmäisen viritetyn tilan $n = 2$ välillä on

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\left(2^2 - 1^2\right)$$

$$L = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8mc}} = 7.6\,\text{Å}$$

Alhaalla esitettyinä vaaditut om. tilat ja niiden tn.tiheydet.



b) Valosähköisen ilmiön yhtälö

$$eV_{\text{stop}} = \frac{hc}{\lambda} - \phi\,.$$

Ratkaistaan ϕ ja sijoitetaan arvot

$$\phi = \frac{hc}{\lambda} - eV_{\text{stop}} = 1.9\,\text{eV}\,.$$

Eli kyseessä on Cesium.

3. Merkitään aluetta $x > 0$ alueeksi I ja $x < 0$ alueeksi II. Nyt elektroni tulee oikealta ja yritteeksi sopii $\psi_i = Ae^{-ik^{'}x}$ ja heijastuneeksi aalloksi $\psi_r = Be^{ik^{'}x}$, jossa $k^{'} = \frac{\sqrt{2m(E-E_0)}}{\hbar}$. Läpäissyt aalto on $\psi_t = Ce^{ikx}$, jossa $k^{'} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

Jatkuvuusehdoista:

$$\begin{aligned} \psi_I(0) &= \psi_{II}(0) \\ A + B &= C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\psi_I(x)\bigg|_0 &= \frac{\partial}{\partial x}\psi_{II}(x)\bigg|_0 \\ k^{'}A - k^{'}B &= kC \end{aligned}$$

Näistä saadaan ratkaistua amplitudi B:ksi

$$B = \frac{k^{'} - k}{k^{'} + k}A$$

Ja tn. heijastuskerroin

$$R = \frac{B^*B}{A^*A} = \left(\frac{k^{'} - k}{k^{'} + k}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{E_0}{E}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{E_0}{E}} + 1}\right)^2 = 0.0294$$

4. Merkitään annettua aaltofunktioa $\psi(\phi) = c_1\chi_1(\phi) + c_2\chi_2(\phi)$. Helposti laskemalla voidaan osoittaa, että annetut om. funktiot ovat ortogonaalisia

$$\int_0^{2\pi} \chi_m^*(\phi)\chi_n(\phi)d\phi = 2\pi\,\delta_{mn}$$

a) Normalisointi integraali

$$\int_0^{2\pi} \psi(\phi)^*\psi(\phi)d\phi = |A|^2\left(2\pi \cdot \frac{1}{25} + 2\pi \cdot \frac{16}{25}\right) = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{25}{34\pi}}$$

d) Lasketaan ensiksi L_z odotusarvo

$$\begin{aligned} \langle L_z \rangle &= \int_0^{2\pi} \psi(\phi)^*\hat{L}_z\psi(\phi)d\phi = \int_0^{2\pi} (c_1\chi_1(\phi) + c_2\chi_2)^*\left(c_1\hat{L}_z\chi_1(\phi) + c_2\hat{L}_z\chi_2(\phi)\right) \\ &= \int_0^{2\pi} (c_1\chi_1(\phi) + c_2\chi_2)^*\left(2\hbar\, c_1\chi_1(\phi) - 3\hbar\, c_2\chi_2(\phi)\right)d\phi \\ &= 2\pi\left(2\hbar|c_1|^2 - 3\hbar|c_2|^2\right) = 2\pi\frac{25}{34\pi}\left(2\hbar\frac{1}{25} - 3\hbar\frac{16}{25}\right) = -\frac{46}{17}\hbar \end{aligned}$$

b) Eli yksittäisistä mittauksista saatavia arvoja ovat $2\hbar$ ja $-3\hbar$.
c) Näiden todennäköisyydet ovat

$$|c_1|^2 = 2\pi\frac{25}{34\pi}\frac{1}{25} = \frac{1}{17}$$

ja

$$|c_2|^2 = 2\pi\frac{25}{34\pi}\frac{16}{25} = \frac{16}{17}$$

5. a) Radiaalinen todennäköisyys:

$$P(r) = r^2 R_{32}^2(r)$$

Todennäköisin etäisyys (vakiot mäkeen)

$$\frac{dP(r)}{dr} = \left(6r^5 - \frac{1}{a_0}r^6\right)\ e^{-r/2a_0} = 0$$
$$6 - \frac{r}{a_0} = 0$$
$$r = 6a_0$$

b) Ydintä kiertävä elektroni on **stationaarisessa** tilassa, jolloin sen todennäköisyystiheys on vakio ajan suhteen ($\frac{d|\psi|^2}{dt} = 0$). Koska tn.tiheys on verrannollinen varaustiheyteen, ei myöskään varaustiheys muutu ajan suhteen, jolloin elektroni ei ole missään vaiheessa kiihtyvässä liikkeessä kvanttimekaanisesti tarkasteltuna.