

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1, syksy 2011

Välikoe 3, 12.12.2011

Ylioppilastutkinnoissa hyväksytyt laskimet on sallittu.

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases},$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. a) Laske l'Hôpitalin sääntöä käyttäen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}.$$

- b) Laske osittaisintegroimalla

$$\int x^2 e^{2x} dx.$$

3. a) Laske

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx.$$

- b) Laske

$$\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx.$$

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = e^{2t} \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Laplace-muunnoksen avulla.

Tarvittavia kaavoja löydät sivun kääntöpuolelta.

Laplace-muunnoksia

Funktio	Muunnos
$t^n, n \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Merkitään $\hat{f} = \mathcal{L}[f]$, $\hat{g} = \mathcal{L}[g]$ ja $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$.

Funktio	Muunnos
$af + bg$	$a\hat{f} + b\hat{g}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-st_0}\hat{f}(s)$
$e^{-at}f(t)$	$\hat{f}(s + a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \hat{f}^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$s\hat{f}(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2\hat{f}(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n\hat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0)$