T-61.3025 Hahmontunnistuksen perusteet

Tentti 5. 3. 2012

1. Oletetaan 2 luokan tilanne d-ulotteisessa hahmoavaruudessa, missä kummankin luokan tiheysjakaumat ovat multinormaalisia, siis

$$p(\mathbf{x}|\omega_i) = vakio \times exp[-1/2(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)].$$

   Oletamme siis, että luokkien kovarianssimatriisit ovat samat. Oletetaan vielä, että myös *a priori* todennäköisyydet molemmille luokille ovat samat.

   Osoita, että luokan 1 optimaalinen Bayesin diskriminanttifunktio $P(\omega_1|\mathbf{x})$ on muotoa

$$P(\omega_1|\mathbf{x}) = \frac{1}{1+exp(\mathbf{w}^T\mathbf{x}+w_0)},$$

   missä $\mathbf{w}$ on eräs vektori ja w_0 on eräs skalaari, siis samaa muotoa kuin sigmoidisen perseptronin ulostulo.

2. On annettuna kaksi lineaarisesti erottuvaa luokkaa d-ulotteisessa hahmoavaruudessa. Esitä kolme erilaista perusteltua tapaa muodostaa luokille lineaarinen luokitin (joka siis jakaa hahmoavaruuden kahteen puoliavaruuteen sopivan hypertason avulla).

3. Muodosta yksiulotteinen Parzen-estimaatti tiheysfunktiolle p_x annetuista näytteistä

$$x^{(i)} : 2.5, 2.8, 3.4, 4.2, 4.5, 4.7, 5.2, 5.6, 7.5.$$

   Käytä tasakylkisen kolmion muotoista ikkunafunktiota (kernel-funktiota). Valitse sen leveys (kannan pituus) sopivasti. Matemaattista lauseketta ei tarvita, vaan piirtämällä tehty ratkaisu kelpaa.

4. Tarkastellaan seuraavaa läheisyysmatriisia viidelle piirrevektorille:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 9 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Käytä sekä yksinkertaista (single) että täydellistä (complete) linkkialgoritmia ja hierarkista klusterointia rakentaaksesi dendrogrammit P:stä. Kommentoi tuloksia.

5. Tarkastellaan Itseorganisoivaa karttaa (Self-Organizing Map, SOM) tapauksessa, missä neuronihila on 1-ulotteinen (neuroneilla on vain yksi indeksi) ja input-avaruus samoin 1-ulotteinen. Siten myös neuronien painot ovat skalaarilukuja. Oletetaan että neuronin i naapurit ovat $i-1$ ja $i+1$ paitsi päissä ($i=1, i=N$), joissa on vain yksi naapuri. Osoita että jos kartta on järjestyneessä tilassa (painot indeksien mukaisessa suuruusjärjestyksessä), se ei Kohosen opetusalgoritmissa voi joutua epäjärjestykseen, mikäli opetuskertoimella α on sopiva arvo. Millä välillä täytyy α:n olla?

ENGLISH TRANSLATIONS

1. Assume 2 classes in an d dimensional pattern space, where the density functions of both classes are multinormal (gaussian), thus

$$p(\mathbf{x}|\omega_i) = constant \times exp[-1/2(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)].$$

We assume that the covariance matrices for both classes are the same. Let us further assume that also the *a priori* probabilities for both classes ar the same.

Show that the optimal Bayes discriminant funtion for class 1, $P(\omega_1|\mathbf{x})$ has the form

$$P(\omega_1|\mathbf{x}) = \frac{1}{1+exp(\mathbf{w}^T\mathbf{x}+w_0)},$$

where $\mathbf{w}$ is a vector and w_0 is a scalar. Thus, it has the same form as the output of a sigmoidal Perceptron.

2. We are given two linearly separable classes in a d dimensional pattern space. Present three different well-founded ways to build a linear classifier for the classes (the classifier divides the pattern space into two half-spaces by a suitable hyperplane).

3. Construct a one-dimensional Parzen estimate for the density function p_x based on the sample

$$x^{(i)} : 2.5, 2.8, 3.4, 4.2, 4.5, 4.7, 5.2, 5.6, 7.5.$$

Use a window (kernel) function that has a shape of an isosceles triangle (two of the sides have equal lengths). Choose the width (length of the base) suitably. Mathematical expression is not needed, it is enough to plot the solution.

4. Consider the following proximity matrix for five feature vectors:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 9 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Apply hierarchical clustering and the single link and complete link algorithms to P and comment on the resulting dendrograms.

5. Consider the Self-Organizing Map (SOM) in a case where the neuron grid is one-dimensional (each neuron has only one index) and the input space is one-dimensional as well. Thus the weights of the neurons are one-dimensional, too. Assume that the neighbors of neuron i are $i-1$ and $i+1$, except at the ends ($i=1, i=N$) where there is only one neighbor. Show that if the map is in an ordered state (the weights are in the same order as the neuron indeces), it cannot get disordered in the Kohonen learning algorithm, if the learning rate α has a suitable value. What is the suitable interval for α ?