Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Pitkäranta/Tajakka

# Mat-1.1020 Grundkurs L2

## Mellanförhör 2 26.03.2012

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. a) Bestäm LU-faktoriseringen av matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   b) Bevisa påståendet: Om $\mathbf{A}$ är en kvadratisk $n \times n$–matris, så har ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ om och endast om det finns en matris $\mathbf{B}$ sådan att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

2. Den affina avbildningen $[x, y, z]^T \mapsto [x', y', z']^T = \mathbf{f}(x, y, z)$, där

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   kan tolkas som en parallelprojektion på ett plan $T$ i rummet i riktningen ges av en linje. Bestäm ortogonala projektionen på detta plan $T$ som en affin avbildning på formen $\mathbf{g}(x, y, x) = \mathbf{A}[x, y, z]^T + \mathbf{b}$.

3. a) I en punkt $P = (x, y, z)$ i rummet $\mathbb{R}^3$ är $f(P) = 2$, $\vec{F}(P) = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\nabla f(P) = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ och $\nabla \cdot \vec{F}(P) = 8$. Beräkna $\nabla \cdot (f\vec{F})$ och motivera formeln du använt i beräkningen.

   b) Flödet hos en elektrisk ström i rummet ges i cylindriska koordinater av $\vec{J} = e^{-r^2}\vec{e}_z$. Strömmen ger upphov till ett magnetfält på formen $\vec{H} = H(r)\vec{e}_\varphi$, där $H(0) = 0$. Bestäm $H(r)$ mha. Maxwells ekvation

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \vec{J}.$$

4. Om man vill bestämma punkten $P = (x, y)$ på kurvan $S : y = x^3$, som är närmast punkten $Q = (3, 0)$, så är en metod att minimera $|PQ|^2$ under bivillkoret $(x, y) \in S$ med hjälp av Lagrange multiplikator ($\lambda$). Bilda ekvationssystemet för de obekanta storheterna $x, y, \lambda$, som fås via denna metod. Eliminera $\lambda$ och lös det återstående ekvationssystemet approximativt genom att använda begynnelsevärdet $(x_0, y_0) = (1, 1)$ och förbättra detta genom att använda den 2-dimensionella Newton–iterationen ett steg.

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, perustieteiden korkeakoulu

Pitkäranta/Tajakka

# Mat-1.1020 Peruskurssi L2

## Välikoe 2 26.03.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä LU-hajotelma matriisille $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   b) Todista väittämä: Jos $\mathbf{A}$ on neliömatriisi kokoa $n \times n$, niin yhtälöryhmällä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ on ratkaisu jokaisella $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ täsmälleen kun on olemassa matriisi $\mathbf{B}$ siten, että $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

2. Affiinikuvaus $[x, y, z]^T \mapsto [x', y', z']^T = \mathbf{f}(x, y, z)$, missä

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   on tulkittavissa suuntaisprojektioksi avaruustasolle $T$ erään suoran suunnassa. Määritä kohtisuora projektio ko. tasolle $T$ affiinikuvauksena muotoa $\mathbf{g}(x, y, x) = \mathbf{A}[x, y, z]^T + \mathbf{b}$.

3. a) Avaruuden $\mathbb{R}^3$ eräässä pisteessä $P = (x, y, z)$ on $f(P) = 2$, $\vec{F}(P) = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\nabla f(P) = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ja $\nabla \cdot \vec{F}(P) = 8$. Laske $\nabla \cdot (f\vec{F})$ pisteessä $P$ ja perustele käyttämäsi laskukaava!

   b) Sähkövirran tiheys avaruudessa on lieriökoordinaatistossa $\vec{J} = e^{-r^2}\vec{e}_z$. Virta synnyttää magneettikentän muotoa $\vec{H} = H(r)\vec{e}_\varphi$, missä $H(0) = 0$. Määritä $H(r)$ Maxwellin yhtälöstä

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \vec{J}.$$

$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$
$z = h$

4. Haluttaessa määrätä käyrän $S : y = x^3$ piste $P = (x, y)$, joka on lähinnä pistettä $Q = (3, 0)$, eräs keino on minimoida $|PQ|^2$ huomioiden rajoitusehto $(x, y) \in S$ Lagrangen kertojan ($\lambda$) avulla. Muodosta tämän menettelyn mukainen yhtälöryhmä tuntemattomille $x, y, \lambda$. Eliminoi $\lambda$ ja ratkaise jäljelle jäänyt yhtälöryhmä likimäärin ottamalla alkuarvaukseksi $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ja tarkentamalla tämä yhdellä 2-ulotteisen Newtonin iteraation askeleella.

$(x-3)^2 + (y-0)^2$