Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Alestalo/Eirola/Seiskari

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

2. välikoe 27.3.2012 klo 16–19.

Ei laskimia eikä taulukoita. **Laskujen välivaiheet voi tehdä formaalisti tutkimatta integraalien suppenemista jms.**

1. Olkoon $u\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ harmoninen eli $\Delta u = 0$.
   a) Osoita, että funktio $U(x, y, z) = u(y, z, x)$ on harmoninen.
   b) Osoita (keskiarvoperiaatetta käyttämättä), että funktiolle
   $$g(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(0,r)} u(y)\, dS(y)$$
   pätee $g'(r) = 0$ kaikilla $r > 0$. Tässä $0 = (0, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ ja $S(0, r) = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid |y| = r\}$.

2. a) Mikä on 1-ulotteisen lämpöyhtälön $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$, ratkaisu alkuehdolla $u(x, 0) = \delta_0(x) =$ Diracin delta-funktio?
   b) Tarkastellaan lämpöyhtälöä $u_t = u_{xx}$ alueessa $x > 0$, $t > 0$, kun alkuehtona on $u(x, 0) = f(x)$, $x \geq 0$, ja reunaehtona $u(0, t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$. Määritä ratkaisukaavassa
   $$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, y, t) f(y)\, dy$$
   esiintyvä Greenin funktio G.
   Vihje: Jatka f alueeseen $x < 0$ niin, että tuloksena on pariton funktio.

3. a) Kun jännitetyn kielen $0 \leq x \leq L$ värähtelyä vaimentavat sisäiset voimat, saadaan osittaisdifferentiaalyhtälö $u_{tt} = u_{xx} + \varepsilon u_{xxt}$, jossa $\varepsilon > 0$ ja $u(0, t) = u(L, t) = 0 = u_t(0, t) = u_t(L, t)$ kaikilla $t \geq 0$. Osoita, että kielen kokonaisenergialle
   $$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(u_t(x, t)^2 + u_x(x, t)^2\right) dx$$
   pätee $E'(t) = -\varepsilon \displaystyle\int_0^L u_{xt}(x, t)^2\, dx \leq 0$.
   b) Osoita, että a-kohdan ongelman ratkaisu on yksikäsitteinen annetuilla reunaehdoilla ja alkuehdoilla $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$. Oletetaan tunnetuksi, että ratkaisu on olemassa.

4. Käyrän $\theta = \theta(\varphi)$, $\varphi \in [0, \alpha]$, kaarenpituus R-säteisen pallon pinnalla on muotoa
   $$L(\theta) = R \int_0^\alpha \sqrt{1 + \theta'(\varphi)^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$
   Pallon pinnan geodeesit eli kaarenpituuden minimoivat käyrät voidaan symmetrian vuoksi selvittää käyttämällä alkuehtoja $\theta(0) = \pi/2$, $\theta'(0) = 0$. Muodosta funktionaalin $L(\theta)$ Euler-Lagrange-yhtälö ja osoita, että $\theta \equiv \pi/2$ on ekstremaali. Mikä on vastaava geodeesi?

Sekalaisia kaavoja kääntöpuolella!

- $\int_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$
- $\int_D (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS$
- $k(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$
- $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$
- $x = r \sin\theta \cos\varphi, \; y = r \sin\theta \sin\varphi, \; z = r \cos\theta, \; |J| = r^2 \sin\theta$