Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, perustieteiden korkeakoulu

Pitkäranta/Tajakka

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Välikoe 2 26.03.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä LU-hajotelma matriisille $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   b) Todista väittämä: Jos $\mathbf{A}$ on neliömatriisi kokoa $n \times n$, niin yhtälöryhmällä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ on ratkaisu jokaisella $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ täsmälleen kun on olemassa matriisi $\mathbf{B}$ siten, että $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

2. Affiinikuvaus $[x, y, z]^T \mapsto [x', y', z']^T = \mathbf{f}(x, y, z)$, missä

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   on tulkittavissa suuntaisprojektioksi avaruustasolle T erään suoran suunnassa. Määritä kohtisuora projektio ko. tasolle T affiinikuvauksena muotoa $\mathbf{g}(x, y, x) = \mathbf{A}[x, y, z]^T + \mathbf{b}$.

3. a) Avaruuden $\mathbb{R}^3$ eräässä pisteessä $P = (x, y, z)$ on $f(P) = 2$, $\vec{F}(P) = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\nabla f(P) = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ja $\nabla \cdot \vec{F}(P) = 8$. Laske $\nabla \cdot (f\vec{F})$ pisteessä P ja perustele käyttämäsi laskukaava!

   b) Sähkövirran tiheys avaruudessa on lieriökoordinaatistossa $\vec{J} = e^{-r^2}\vec{e}_z$. Virta synnyttää magneettikentän muotoa $\vec{H} = H(r)\vec{e}_\varphi$, missä $H(0) = 0$. Määritä $H(r)$ Maxwellin yhtälöstä

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_z \\ H_r & rH_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \vec{J}.$$

4. Haluttaessa määrätä käyrän $S : y = x^3$ piste $P = (x, y)$, joka on lähinnä pistettä $Q = (3, 0)$, eräs keino on minimoida $|PQ|^2$ huomioiden rajoitusehto $(x, y) \in S$ Lagrangen kertojan (λ) avulla. Muodosta tämän menettelyn mukainen yhtälöryhmä tuntemattomille x, y, λ. Eliminoi λ ja ratkaise jäljelle jäänyt yhtälöryhmä likimäärin ottamalla alkuarvaukseksi $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ja tarkentamalla tämä yhdellä 2-ulotteisen Newtonin iteraation askeleella.