Tehtävä 1

Ovatko seuraavat väittämät oikein vai väärin? Perustele vastauksesi.

(a) Kanta on degeneroitunut jos ja vain jos sitä vastaava kantamatriisi on singulaarinen.
(b) Optimissa muuttujan redusoitu kustannus voi poiketa nollasta vain jos muuttujan arvo on nolla.
(c) Standardimuotoinen tehtävä on epäkäypä jos ja vain jos sen duaali on epäkäypä tai rajoittamaton.
(d) Käytännössä kaikki ratkaisualgoritmit, jotka soveltuvat suurten kokonaislukuoptimointitehtävien ratkomiseen ovat polynomiaikaisia.

Arvostelu

Oikea johtopäätös ja perustelu (1.5 p). Väärä johtopäätös mutta perustelu lähes oikein (1 p). Oikea johtopäätös mutta puutteellinen perustelu joka kuitenkin on oikeansuuntainen (0.5 p).

Vastaukset

(a) Väärin. Kaksi virhettä (toinen riittää): Singulaarisuus vastaa sitä että kaksi tai useampi rajoitussuora on samansuuntaiset, mutta degeneraatioon riittää että riittävän monta suora leikkaa kulmapisteessä. Toiseksi kantamatriisin on määritelmän mukaan oltava kääntyvä, jolloin ehto ei tässä mielessä koskaan toteudu.
(b) Oikein. Seuraa suoraan täydentyvyysehdosta, jonka mukaan $(c_j - p'A_j)x_j = 0$.
(c) Väärin. Jos duaali on epäkäypä tai rajoittamaton voi primaali olla myös rajoittamaton. Voidaan lukea taulukosta jossa mahdolliset ja mahdottomat primaali-duaali-parit (seurausta heikosta ja vahvasta duaalisuudesta).
(d) Väärin. Käytetään myös eksponentiaaliaikaisia algoritmeja ja toisaalta heuristisia menetelmiä, joille ei voida taata mitään ylärajaa optimin löytämiseen vaadittavalta laskentamäärälle.

Tehtävä 2

(a) Viidestä vaihtoehdosta halutaan toteuttaa mahdollisimman monta seuraavien rajoitusten vallitessa:
- Vaihtoehtoa 1 ei voi toteuttaa ellei vaihtoehtoa 2 tai 3 ole toteutettu.
- Vähintään 1 mutta enintään 2 vaihtoehdoista 2-5 toteutetaan.
- Vaihtoehto 5 voidaan toteuttaa vain jos vaihtoehtoa 1 ei ole toteutettu, paitsi jos vaihtoehdot 3 ja 4 on toteutettu.

Formuloi ongelma lineaarisen kokonaislukuoptimoinnin tehtävänä.

(b) Olkoon matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, vektorit $b \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}^m$, $c \geq 0$ sekä päätösvektori $x \in \mathbb{R}^m$. Formuloi (jatkuvana) lineaarisen ohjelmoinnin tehtävänä

$$\min \quad \sum_{j=1}^{m} c_j |x_j| \quad \text{s.e. } Ax \geq b \ .$$

Vastaus

(a) Päätösmuuttuja $x_i = 1$ jos vaihtoehto i valitaan, muulloin 0. M on suuri luku ja y binäärinen indikaattorimuuttuja tai-ehdolle. (0.5 p)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{5} x_i (0.5\ p) \\
\text{s.e.} \quad & x_1 \leq x_2 + x_3 (0.5\ p) \\
& 1 \leq \sum_{i=2}^{5} \leq 2 (0.5\ p) \\
& x_5 \leq 1 - x_1 + My (0.5\ p) \\
& x_3 + x_4 \geq 2 - M(1-y)(0.5\ p) \\
& x_i, y \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

(b) Tehtävän voi ratkaista kahdella tavalla josta arvostellaan formulaatio (2 p) ja sen selitys (1 p). Havaitaan että $|x_i|$ on pienin luku z_j jolle pätee $x_i \leq z_i$ ja $-x_i \leq z_i$. Tällöin tehtävän

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{m} c_j z_j \\
\text{s.e.} \quad & Ax \geq b \\
& x_j \leq z_j, j = 1, \ldots, n \\
& -x_j \leq z_j, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

optimissa $z_j = |x_j|$, kun $c_j \geq 0 \forall j$, sillä formulaatiossa kannattaa aina pienentää muuttujan arvoa mikäli sillä on ylijäämää. Tehtävän voi myös formuloida jakamalla muuttujat positiiviseen ja negatiiviseen osaan: $x_j = x_j^+ - x_j^-, x_j^+, x_j^- \geq 0$. Tällöin tehtävän

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{m} c_j (x_j^+ + x_j^-) \\
\text{s.e.} \quad & Ax \geq b \\
& x_j = x_j^+ - x_j^- j = 1, \ldots, n \\
& x_j^+, x_j^- \geq 0, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

optimissa $x_j^+ + x_j^- = |x_j|$, sillä tasan toinen muuttujista x_j^+ ja x_j^- poikkaa nollasta kun $c_j \geq 0 \forall j$, koska jälleen kannattaa aina ylijäämän pienentäminen.

Tehtävä 3

Tarkastellaan tehtävää

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\
\text{s.e.} \quad & \text{con1:} \;\; 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\
& \text{con2:} \;\; 3x_1 + x_2 = 3 \\
& \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0\ .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(a) Muodosta tehtävän Simplex-taulukko, kun kannassa ovat muuttujat x_2 ja x_3.
(b) Mitä Simplex-taulukosta löytyy? Anna taulukon osille geometrinen tulkinta.
(c) Ratkaise tehtävä Simplex-algoritmilla alkaen muodostamastasi taulukosta.
(d) Muodosta tehtävän duaali ja piirrä Simplex-algoritmin kulku duaaliavaruuteen.

Vastaus

(a) Tehtävä on valmiiksi standardimuodossa ja tehdään muutama alkeisrivioperaatio Simplex-taulukon luomiseksi. Vähennetään puolittain con2 con1:stä, jolloin saadaan $2x_1 + 3x_3 = 5 \Rightarrow \frac{2}{3}x_1 + x_3 = \frac{5}{3}$. Asettamalla $x_1 = 0$ (ei kantamuuttuja) voidaan tehtävästä

$$\begin{array}{ll} \min & 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s.e.} & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & \dfrac{2}{3}x_1 + x_3 = \dfrac{5}{3} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\ . \end{array}$$

lukea kantamuuttujien arvot ja kohdefunktion arvoksi laskea $3 \cdot 10 + 6 \cdot \frac{5}{3} = 40$. Vähentämällä kohdefunktiosta 10 kertaa rajoite 1 ja ja 6 kertaa rajoite 2 saadaan kohdefunktion riville $13 - 3 \cdot 10 - \frac{2}{3} \cdot 6 = -21$. Simplex-taulukoksi saadaan siis

-40	-21	0	0
$x_2 = 3$	3	1	0
$x_3 = \frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1

(1.5p)

(b) Taulukosta löytyy

-(kohdefunktion arvo)	Redusoidut kustannukset
Kantamuuttujien arvot	Kantasuunnat

(1.5p)

Kantasuunnat kertovat mihin suuntaan siirrytään jotta yhtälörajoitteet toteutuvat kun ei-kantamuuttuja tuodaan kantaan (0.5 p). Redusoidut kustannukset kertovat kuinka paljon kohdefunktion arvon muuttuu jos kyseiseen kantasuuntaan liikutan siten että kyseinen muuttuja kasvaa yhden yksikön (0.5 p).

(c) Ratkaisu ei ole optimaalinen sillä muuttujan x_1 redusoitu kustannus on negatiivinen. Otetaan se kantaan, jolloin muuttuja x_2 poistuu kannasta kun askelpituus on 1. Seuraavaksi taulukoksi saadaan

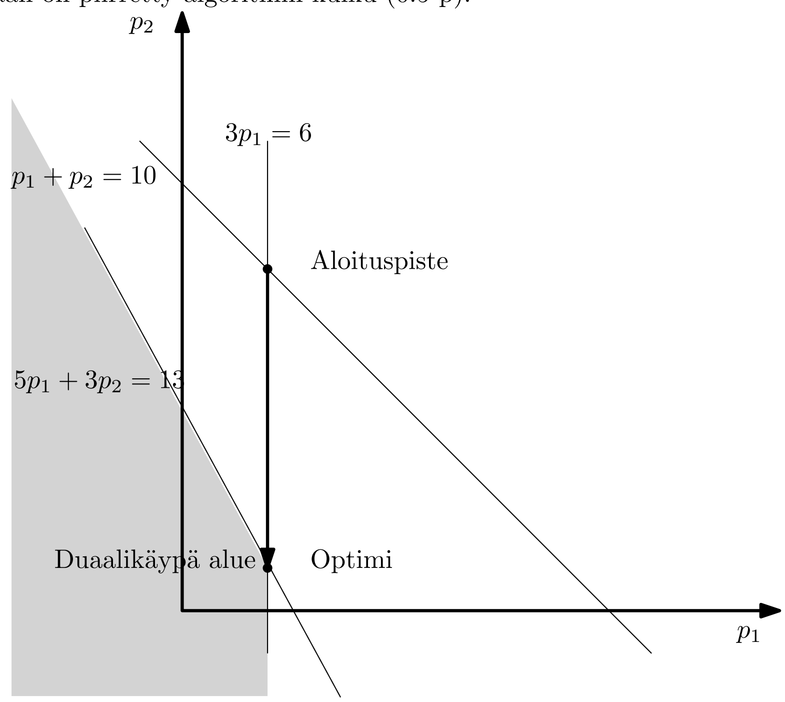
-19	0	7	0
$x_1 = 1$	1	$\frac{1}{3}$	0
$x_3 = 1$	0	$\frac{2}{9}$	1

Taulukko on optimaalinen sillä kaikki redusoidut kustannukset ovat positiivisia. Optimissa $x = (1, 0, 1)$ ja optimaalinen kustannus on 19. (1.5 p)

(d) Tehtävän duaali on

$$\begin{array}{ll} \max & 8p_1 + 3p_2 \\ \text{s.e.} & 5p_1 + 3p_2 \leq 13 \\ & p_1 + p_2 \leq 10 \\ & 3p_1 \leq 6 \end{array} \qquad (0.5\ p)$$

Algoritmin kulku saadaan täydentyvyysehdoista: aloituspisteessä aktiivisena duaalin 2. ja 3. rajoitus, optimissa taas 1. ja 3. rajoitus (0.5 p). Oheiseen kuvaan on piirretty algoritmin kulku (0.5 p).



Tehtävä 4

Jatketaan tehtävän 3 lineaarisen ohjelman (1) tarkastelua. Taulukossa 1 on tehtävän herkkyysanalyysiraportti. Vastaa raportin avulla (ratkaisematta tehtävää uudelleen) seuraaviin kysymyksiin:

(a) Kuinka paljon muuttujan x_2 kustannus saa muuttua ennen kuin se tulee kantaan? Entä muuttujan x_3 kustannus?

(b) Kumpi on kannattavampaa: (i) vähentää rajoitteen con1 oikeaa puolta 2 yksikköä jos siitä joutuu maksamaan 3 yksikköä vai (ii) lisätä rajoitteen con2 oikeaa puolta 2 yksikköä jos kustannuksista tällöin saa vähentää 6 yksikköä?

(c) Tehtävään lisätään epänegatiivinen muuttuja x_4 ja sitä vastaava yksikkökustannus $c_4 = -2$ ja rajoitusmatriisin sarake $A_4 = (7, -6)$. Muuttuuko optimaalinen kanta?

(d) Oletetaan että tehtävään lisätään epäyhtälörajoite, jonka seurauksena optimaalinen kanta muuttuu. Miten voidaan alkuperäisen tehtävän optimaalista Simplex-taulukkoa hyödyntää duaalisimplex-algoritmin alustamisessa?

Vastaus

(a) Muuttujan x_2 kerroin saa vaihdella välillä $[3, \infty]$ (obj coef range) ennen kuin se tulee kantaan. Kun kustannus on alle kolmen tulee muuttuja kantaan. Muuttuja x_3 on kannassa kun kustannus on välillä $[-25.5, \infty]$, eli muuttuja poistuu kannasta jos kustannus on alle -25.5. (toinen oikein 1 p, molemmat oikein 1.5 p)

(b) con1 varjokustannus (marginal) on $p_1 = 2$ ja con2 varjokustannus on $p_2 = 1$. Näin ollen vaihtoehdon (i) kustannusvaikutus on $p_1 \cdot (-2) + 3 = -1$ (muutos pysyy sallituissa rajoissa). Vaihtoehdolle (ii) muutos ylittää suurimman sallitun eli kanta vaihtuu kohdalla 4.8, mutta varjokustannuksen avulla saadaan alaraja hyödylle, eli $p_2 \cdot (4.8 - 3) - 6 = -4.2$. Näin ollen vaihtoehto (ii) on parempi sillä se antaa pienemmän kustannuksen (olettaen että se johtaa käypään ratkaisuun, mikä tässä tapauksessa pitää paikkansa). (1.5 p)

(c) Uuden muuttujan lisääminen ei vaikuta käypyyteen mutta vaikuttaa optimaalisuuteen = duaalikäypyyteen, jolloin käytetään kaavaa $p^T A_4 \leq c_4 \Rightarrow 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-6) = 8 \not\leq -2$, eli duaalikäypyys ei säily ja ratkaisu ei ole enää optimaalinen. (1.5 p)

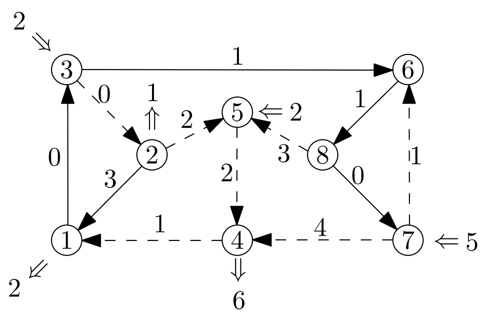
(d) Optimaaliseen Simplex-taulukkoon tarvitsee vain täydentää rivi uutta rajoitetta ja sarake uutta ylijäämämuuttujaa varten, jotta saadaan duaalikäypä aloitusratkaisu, sillä duaalikäypyys säilyy, vaikka primaalikäypyys menetetään. (1.5 p)

Tehtävä 5

Tarkasteellaan kuvan 1 kapasiteettirajoituksetonta verkkotehtävää, missä jokaisen kaaren viereen on merkitty kaarikustannus ja kaksoisnuolilla on merkitty lähteiden ja nielujen kapasiteetit. Katkoviivalla on verkkoon merkitty virityspuu.

(a) Muodosta ongelmasta standardimuotoinen lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä.

(b) Ratkaise tehtävä verkkosimplexillä alkaen merkitystä virityspuusta.



Kuva 1: Verkkotehtävä

Vastaus

(a) Tehtävän voi ratkaista kahdella tavalla, joista ensimmäinen lienee yksinkertaisempi: olkoon $f_{ij} \geq 0$ kaaren (i,j) virtaus, jolloin solmujen divergenssiehtojen ja kohdefunktion seurauksena formulaatio on

$$
\begin{array}{ll}
\min & 3f_{21} + f_{32} + f_{36} + f_{41} + 4f_{74} + 2f_{25} + 2f_{54} + 3f_{85} + f_{68} + f_{76} \\
\text{s.e.} & f_{41} + f_{21} - f_{13} = 2 \qquad \text{(Solmu 1)} \\
& f_{32} - f_{25} - f_{21} = 1 \qquad \text{(Solmu 2)} \\
& f_{13} - f_{32} - f_{36} = -2 \qquad \text{(Solmu 3)} \\
& f_{54} + f_{74} - f_{41} = 6 \qquad \text{(Solmu 4)} \\
& f_{25} + f_{85} - f_{54} = -2 \qquad \text{(Solmu 5)} \\
& f_{36} + f_{76} - f_{68} = 0 \qquad \text{(Solmu 6)} \\
& f_{87} - f_{76} - f_{74} - 5 \qquad \text{(Solmu 7)} \\
& f_{68} - f_{87} - f_{85} = 0 \qquad \text{(Solmu 8)} \\
& f_{ij} \geq 0 \forall (i,j)
\end{array}
\qquad (0.5\ p)
$$

Koska kaikki rajoitteet ovat lineaarisia yhtälöitä, kohdefunktio lineaarinen ja muuttujat epänegatiivisa on tehtävä standardimuodossa.
Toisessa tavassa määritellään virtausmuuttujat vektorissa

$$f = (f_{13}, f_{21}, f_{32}, f_{36}, f_{41}, f_{74}, f_{25}, f_{54}, f_{85}, f_{68}, f_{87}, f_{76})$$

ja niitä vastaavat kaarikustannukset vektorissa c=(0,3,0,1,1,4,2,2,3,1,0,1) ja lähteet/nielut vekotrissa $b = (2, 1, -2, 6, -2, 0, -5, 0)$. Divergenssimatriisin alkio a_{ij} kertoo että onko solmu i kaaren j alku ($a_{ij} = 1$), loppu ($a_{ij} = -1$), vai ei kumpikaan ($a_{ij} = 0$). Matriisi on

$$
A = \left[\begin{array}{c|cccccccccccc}
i\backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right] .
$$

Tällöin tehtävä on standardimuodossa

$$
\begin{array}{rl}
\min & c^T f \\
\text{s.e.} & Af = b \\
& f \geq 0 \ .
\end{array}
$$

(b) Ratkaisemalla puun virrat saadaan nollasta poikkeaviksi virroiksi $f_{32} = 2$, $f_{25} = 1$, $f_{41} = 2$, $f_{76} = 0$, $f_{74} = 5$, $f_{85} = 0$ ja $f_{54} = 3$. Lasketaan redusoidut kustannukset kaavalla

$$\bar{c}_{ij} = \sum_{(k,\ell)\in F} c_{k\ell} - \sum_{(k,\ell)\in B} c_{k\ell} \ ,$$

missä F ja B sisältävät ne eteenpäin/taaksepäin osoittavat kaaret syklissä, joka muodostuu kun kantaan kuulumaton kaari (i, j) lisätään puuratkaisuun (syklin suunta määräytyy kaaren (i, j) mukaan).

Kaaren $(2,1)$ redusoitu kustannus on $\bar{c}_{21} = 3 - 1 - 2 - 2 = -2$ (sillä muodostuu sykli jossa solmut 2,1,4 ja 5), joka on negatiivinen eli suoritetaan kannanvaihto siten että kaari $(2,1)$ tulee kantaan. Kasvatetaan virtaa syklissä kunnes ensimmäinen syklin kaari saa nollavirran. Tässä tapauksessa se on kaari $(2,5)$, joten virtaa voidaan kasvattaa syklissä kaaren $(1,2)$ suuntaisesti enintään 1 yksikön verran ennen kuin ratkaisusta tulisi epäkäypä. Teemme siis kannanvaihdon jossa kaari $(2,1)$ tulee kantaan kaaren $(2,5)$ tilalle.
Nyt kaaren $(1,3)$ redusoitu kustannus on $0+0+3>0$ (ei oteta kantaan). Kaaren $(3,6)$ redusoitu kustannus on $1-1+4+1-3-0>0$ (ei oteta kantaan). Kaaren $(6,8)$ redusoitu kustannus on $1+3+2-4+1>0$ (ei oteta kantaan). Kaaren $(8,7)$ redusoitu kustannus on $0+4-2-3<0$, joten tuomme sen kantaan, ja havaitsemme että poistuva kaari on $(8,5)$. Huomaatkaa että tämä on degeneroitunut kannanvaihto sillä poistuvan kaaren virtaus oli nolla. Nyt voidaan tarkistaa että kaikki redusoidut kustannukset ovat epänegatiivisia eli virtaus on optimaalinen.

Taulukko 1: Herkkyysanalyysiraportti.

```
   No. Row name     St       Activity         Slack   Lower bound       Activity      Obj coef  Obj value at Limiting
                                           Marginal   Upper bound          range         range    break point variable
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------  ------------- ------------- ------------- ------------
     1 con1         NS       8.00000        .            8.00000        5.00000          -Inf      13.00000 x[3]
                                          2.00000        8.00000           +Inf          +Inf          +Inf

     2 con2         NS       3.00000        .            3.00000         .               -Inf      16.00000 x[1]
                                          1.00000        3.00000        4.80000          +Inf      20.80000 x[3]

     3 objective    BS      19.00000     -19.00000          -Inf       40.00000      -1.00000          .    x[2]
                                            .               +Inf       19.00000          +Inf          +Inf

   No. Column name  St       Activity      Obj coef   Lower bound       Activity      Obj coef  Obj value at Limiting
                                           Marginal   Upper bound          range         range    break point variable
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------  ------------- ------------- ------------- ------------
     1 x[3]         BS       1.00000       6.00000         .            1.66667     -25.50000     -12.50000 x[2]
                                            .               +Inf        1.00000          +Inf          +Inf

     2 x[2]         NL        .           10.00000         .           -4.50000       3.00000     -12.50000 x[3]
                                          7.00000           +Inf        3.00000          +Inf      40.00000 x[1]

     3 x[1]         BS       1.00000      13.00000         .            1.00000          -Inf          -Inf
                                            .               +Inf           -Inf      34.00000      40.00000 x[2]
```