Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2

Heikkinen/Perkkiö

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksiin hyväksyttyä laskinta.

Toinen välikoe 27.3.2012

1. Funktion $f(x,y)$ asteen n Taylorin polynomi keskuksena (a,b) on

$$P_n(x,y) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^{m-j}}{\partial y^{m-j}} f(a,b)(x-a)^j(y-b)^{m-j}.$$

   a) Määrää funktion $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+2y}$ toisen asteen Taylorin polynomi keskuksena $(0,0)$.

   b) Määrää $\frac{\partial^4}{\partial x^4} f(0,0)$.

2. a) Laske $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$.

   b) Laske $\iint_D x\, dA$, kun D on epäyhtälöiden $x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge x$ määräämä joukko.

3. a) Laske

$$\iiint_R \frac{x\, e^{2y}}{z}\, dV,$$

   kun R on suorakulmainen särmiö $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, $1 \le z \le e$.

   b) Laske

$$\iiint_D xz\, dV,$$

   kun D on epäyhtälöiden $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$ ja $x^2+y^2+z^2 \le 2$ määräämä kahdeksasosapallo. Saatat tarvita pallokoordinaattimuunnosta

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \\ dV &= \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi. \end{aligned}$$

4. Etsi vektorikentän

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2y - z^3)\mathbf{i} + (3y^2z + x^3)\mathbf{j} + (y^3 - 3xz^2)\mathbf{k}$$

   potentiaali.