

3. välikoe ma 12.12.2011 klo 9.00-12.00

Kaikki yo-kokeessa hyväksytyt laskimet ovat sallittuja. Ei taulukoita.

1. Käyrä $y = \sqrt{x} e^{-2x}$ pyörrähtää x -akselin ympäri kun $x \in [0, \infty)$. Laske syntyvän kappaleen tilavuus. Millä perusteella laskemasi integraali suppenee/hajaantuu?

2. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{2e^x - 2 - 2x}.$$

- b) Osoita, että funktiolla $f(x) = \sin(x) - x^2$ on lokaali maksimi jossakin välin $[0, \pi/2]$ pisteessä x^* . Etsi approksimaatio pisteelle x^* kiintopisteiteraatiota käyttäen laskien kolme iteraatiokierrosta. Iteraation suppene- mista ei tarvitse osoittaa, mutta valitse lähtöarvo järkevästi.

3. a) Esitä hyperbolisten funktioiden $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ ja $\tanh(x)$ määritelmät. Muodosta käänteisfunktion $\tanh^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$ lauseke logaritmin avulla lausuttuna.

- b) Määritä käyrän $y = \cosh(x)$ kaarenpituus välillä $x \in [0, 2]$.

Vihje: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = ?$

4. a) Laske integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)(x+2)}$$

- b) Arvioi integraalia

$$\int_1^2 \ln(x) dx$$

käyttäen jotain kurssin numeerisista integroimismenetelmistä ja neljää integroimisväliä. Valitse menetelmä, joka antaa todennäköisesti tarkimman mahdollisen vastauksen.

Kaavoja:

$$T_n = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$M_n = h \left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right)$$