Aalto-yliopisto
Matematiikan laitos
27.05.2011 klo 13-17

Alestalo/Talponen/Havola

Mat-1.1120 Matematiikan peruskurssi C2, kevät 2011

Ylioppilastutkinnossa kelpaavat laskimet sallittu. Valitse joko yksi välikoeuusinta tai tentti, ja merkitse valintasi selvästi koepaperin otsikkotietoihin. **Koeaika uusinnoissa 3 h, tentissä 4 h.**

Tentti: Tehtävät 1.1, 1.2, 2.1, 2.3, 3.1, 3.3.

1. välikoe

1.1 Suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n n$?

1.2 Johda funktion $\sin(x)$ Taylor-sarja ja näytä sitä tutkimalla, että funktion kaksinkertainen derivaatta toteuttaa $D^2\sin(x) = -\sin(x)$.

1.3 Oletetaan jatkuvasta ja differentioituvasta funktiosta $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, että $g(0,0) = e$ ja $\nabla g(0,0) = (1,-1)$. Anna lineaarinen approksimaatio arvolle $g(0.3, 0.5)$.

1.4 Todista määritelmästä lähtien, että funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$ on jatkuva origossa.

2. välikoe

2.1 Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

(a) $y' = xy^3$ (3p)

(b) $y'' - 2y' + y = 0$ (3p)

2.2 Kappale M ajatellaan kartion $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sisustan ja pallon $x^2+y^2+z^2 \le 1$ leikkaukseksi. Lisäksi ajatellaan, että kappaleen M sisällä aineen tiheys ρ (massa / tilavuus) vaihtelee paikallisesti ja noudattaa kaavaa $\rho(x,y,z) = 1 + z$. Laske kappaleen M massa.

2.3 Määritä lukujen 3 ja 5 käänteisalkiot
a) ryhmässä $\mathbf{Z}_7$, kun laskutoimitus on yhteenlasku (mod 7). (3p)
b) ryhmässä $\mathbf{Z}_7 \setminus \{0\}$, kun laskutoimitus on kertolasku (mod 7). (3p)

2.4 a) Luettele neliön symmetriaryhmän D_8 alkiot ja selitä niiden geometrinen merkitys. (3p)
b) Määritä a-kohdan ryhmälle kaksi aliryhmää, joiden kertaluvut ovat 2 ja 4. (3p)

3. välikoe

3.1 Luvut $1, 2, \ldots, 10$ luetellaan järjestyksessä 2,4,6,8,10,9,7,5,3,1, jolloin määräytyy eräs permutaatio $\alpha \in S_{10}$; esim. $\alpha(2) = 4$. Määritä permutaatioiden α ja α^{-1} sykliesitykset ja merkki $\operatorname{sgn}\alpha$. Mikä on pienin mahdollinen $n \in \mathbf{N}$, jolla $\alpha^n = \mathrm{id}$?

3.2 Tarkastellaan joukon X permutaatioryhmää G. Selitä lyhyesti käsitteiden **rata** ja **stabilisaattori** merkitys. Mikä yhteys niiden alkioiden lukumäärien välillä on?

3.3 Valkoisesta 3×3-ruudukosta neljä ruutua väritetään mustaksi. Montako olennaisesti erilaista ruudukkoa saadaan, jos ruudukko on piirretty
a) paperille? (3p)
b) piirtoheitinkalvolle ($\Rightarrow$ peilauksetkin ovat symmetrioita)? (3p)

3.4 Lukujono (a_n) toteuttaa palautuskaavan $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$ ja alkuehdot $a_0 = a_1 = 1$. Määritä jonon yleisen termin a_n lauseke.

Mid-term exam: 3 hours
Exam: 4 hours. Problems 1.1, 1.2, 2.1, 2.3, 3.1, 3.3.

1st mid-term exam

1.1 Is the series $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n n$ convergent?

1.2 Derive the Taylor-series of $\sin(x)$ and, using the series, show that the second derivative satisfies $D^2\sin(x) = -\sin(x)$.

1.3 The function $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is continuous and differentiable, and $g(0,0) = e$ and $\nabla g(0,0) = (1,-1)$. Find a linear approximation for the value $g(0.3, 0.5)$.

1.4 Starting from the definition, show that the function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$, is continuous at the origin.

2nd mid-term exam

2.1 Solve the following differential equations:

(a) $y' = xy^3$ (3p)

(b) $y'' - 2y' + y = 0$ (3p)

2.2 A solid body M is formed as an intesection of the inside of the cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ and the ball $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Moreover, the density ρ (mass/volume) in M varies as $\rho(x,y,z) = 1+z$. Calculate the mass of M.

2.3 Find the inverses of 3 and 5
a) in the group $\mathbf{Z}_7$, where the binary operation is sum (mod 7). (3p)
b) in the group $\mathbf{Z}_7 \setminus \{0\}$, where the binary operation is multiplication (mod 7). (3p)

2.4 a) List the elements of the symmetry group D_8 of a square and explain their geometrical meaning. (3p)
b) Find two subgroups of D_8 of orders 2 and 4. (3p)

3rd mid-term

3.1 The numbers $1, 2, \ldots, 10$ are listed in the order 2,4,6,8,10,9,7,5,3,1. This defines a permutation $\alpha \in S_{10}$; e.g. $\alpha(2) = 4$. Find the cycle representations of α and α^{-1} and the sign $\operatorname{sgn}\alpha$. What is the smallest $n \in \mathbf{N}$ such that $\alpha^n = \mathrm{id}$?

3.2 We consider a permutation group G of a set X. Give a short explanation for the concepts **orbit** and **stabilizer**. What is the connection between the numbers of elements in each of these two sets?

3.3 Four squares from a 3×3 grid are painted black. How many essentially different grids can be obtained if the grid is drawn on
a) a paper? (3p)
b) an overhead slide ($\Rightarrow$ reflections are also symmetries)? (3p)

3.4 The sequence (a_n) satisfies the recursion $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$ and the initial conditions $a_0 = a_1 = 1$. Find a formula for the general