Matematiikka
Aalto-yliopisto Varpanen / Eronen

Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II (5op)

Tentti 12.12.2011

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää kaikkia ylioppilaskokeessa sallittuja laskimia, ei muita apuvälineitä. Koeaika on neljä tuntia.

1. Tarkastellaan matriisia
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
   a) Laske matriisin ominaisarvot ja -vektorit. (4p)
   b) Kuvaile geometrisesti lineaarikuvauksen $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ käyttäytymistä. (2p)

2. Määritä yleinen ratkaisu DY-parille (a-kohta 2p, b-kohta 4p)
$$a)\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = 4y_1(t) + 3y_2(t) \\ y_2'(t) = 3y_1(t) - 4y_2(t) \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = 5y_1(t) - 4y_2(t) \\ y_2'(t) = 10y_1(t) + y_2(t) \end{array}\right..$$

3. a) Osoita, että kaikilla $a \in \mathbb{R}$ pätee $e^{aI} = e^a I$. (Tässä $I \in M^{n\times n}$ on identtinen matriisi.) (2p)
   b) Laske e^A, kun $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. (4p)

4. a) Laske funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2 e^t$ Laplace-muunnos. (2p)
   b) Minkä funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Laplace-muunnos on $F\colon \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(s) > 2\} \to \mathbb{C}$, $F(s) = \dfrac{1}{(s+3)(s-2)}$? (4p)

5. Muuan konsultti myy palvelujaan kolmelle yritykselle (A, B ja C). Hän ei koskaan vieraile samassa yrityksessä kahtena peräkkäisenä päivänä. Jos hän jonain päivänä vierailee yrityksessä A, niin seuraavana päivänä hän vierailee yrityksessä B. Jos hän jonain päivänä vierailee joko yrityksessä B tai C, niin seuraavana päivänä hän vierailee yrityksessä A kaksi kertaa todennäköisemmin kuin yrityksissä B tai C.
   a) Piirrä vierailuprosessia kuvaava painotettu tilaverkko ja määritä prosessia vastaava Markovin matriisi P. (2p)
   b) Miksi P on säännöllinen? (2p)
   c) Kuinka usein konsultti (keskimäärin) vierailee missäkin yrityksessä? (2p)

Kaavasivu kääntöpuolella.

Taulukko Laplace-muunnoksista

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	suppenemisalue
c (vakio)	$\frac{c}{s}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$e^{kt},\ k \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-k}$	$\mathrm{Re}\,(s) > \mathrm{Re}\,(k)$
$\sin at,\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$\cos at,\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > 0$
$e^{-kt}\sin at,\ k, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{(s+k)^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > -k$
$e^{-kt}\cos at,\ k, a \in \mathbb{R}$	$\frac{s+k}{(s+k)^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\,(s) > -k.$

Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, kun $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma$, niin

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a),\ \mathrm{Re}\,(s) > \sigma + \mathrm{Re}\,(a)$$

kaikilla $a \in \mathbb{C}$ ja

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s),\ \mathrm{Re}\,(s) > \sigma.$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos myös $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, kun $\mathrm{Re}\,(s) > \delta$, niin

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s),\ \mathrm{Re}\,(s) > \max\{\sigma, \delta\}$$

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.