Aalto-yliopisto
Mat-1.1110 Matematiikan peruskurssi C1 **Joensuu/Baarman**
2. välikoe, syksy 2011, 14.11.2011

Yo-kirjoituksissa hyväksytty laskin sallittu.

Tehtävät

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

2. a) Etsi sellainen 2×2 matriisi A, että matriisitulo $A\mathbf{x}$ kiertää vektoria $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{0}}$, origon ympäri 45 astetta vastapäivään ja kasvattaa vektorin pituuden $|\mathbf{x}|$ nelinkertaiseksi.
   Muistutus: Tason kiertomatriisi $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, missä φ on kiertokulma. Lisäksi $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   b) Osoita, että $A^T = A^{-1}$, kun

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

3. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisarvoja vastaavat kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

4. Muodosta sellainen 2×2-matriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$ ja vastaavat ominaisvektorit ovat $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$.