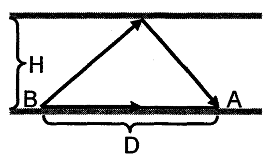
Tfy-0.1064 Fysiikka 4 Tentti 18.5.2012

Merkitse jokaiseen vastauspaperiin nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma ja kurssin koodi.
Mainitse suorititko laskuharjoituksia keväällä 2012. **Käytä selkeää käsialaa!**

1. Vastaa lyhyesti ja selkeästi seuraaviin kysymyksiin.
a) Osoita, että Lenzin laki sisältyy Faradayn lakiin. (1p)
b) Mitä tarkoittavat aallon vaihe- ja ryhmänopeus? (1p)
c) Mikä on Poyntingin vektori ja mitä se kuvaa fysikaalisesti? (1p)
d) Mikä on Rayleighin resoluutiokriteeri? (1p)
e) Kirjoita lauseke positiivisen x-akselin suuntaan lasissa (taitekerroin n) etenevälle oikeakätisesti ympyräpolaroidulle harmoniselle sähkömagneettiselle tasoaallolle, jonka taajuus on ω. Ilmoita lauseke taajuuden, taitekertoimen ja luonnonvakioiden avulla parametrisoituna. Tässä riittää tarkastella vain aallon sähkökenttää. (1p)
f) Selosta lyhyesti sähkömagneettisen säteilyn lähettämisen ja vastaanottamisen periaate. (1p)

2. Tutkitaan ilmakehän vertikaalisuuntaista liikettä oheisen kuvan mukaisella koejärjestelyllä. Radiolähetin B lähettää signaalia taajuudella 10 MHz. Vastaanotin A sijaitsee D = 500 km päässä B:stä ja havaitsee kaksi signaalia: Suoraan maata pitkin tulleen ja H = 200 km korkeudella olevasta ilmakehän kerroksesta heijastuneen. Vastaanotetun signaalin voimakkuudessa havaitaan maksimi 8 kertaa minuutissa. Millä vauhdilla ilmakehän kerros liikkuu vertikaalisuunnassa? Oletetaan, että ilmakehän kerros heijastaa kaiken siihen osuvan signaalin. Maan kaarevuutta ei tarvitse myöskään huomioida. (6p)



3. Neliönmuotoinen johdinsilmukka laitetaan keskelle ympyränmuotoista solenoidia, jossa magneettivuon tiheys kasvaa nopeudella dB/dt = 35 mT/s. Silmukka on solenoidin poikkileikkauksen tasossa ja silmukan sivun pituus a = 20 cm on niin pieni, että silmukka mahtuu kokonaan solenoidin sisälle.
a) Määritä silmukkaan indusoitunut sähkökenttä. (4p)
b) Oletetaan, että a-kohdan sähkökenttää voidaan kuvata potentiaalilla staattisten kenttien tapaan. Määritä kahden vierekkäisen kulman välinen jännite. (1p)
c) Dynaamista sähkökenttää ei kuitenkaan voida yleisesti kuvata potentiaalilla. Perustele tämä jotenkin. (1p)

4. Maxwellin yhtälöt
a) Kirjoita Maxwellin yhtälöt differentiaalimuodossa ja nimeä esiintyvät suureet. (2p)
b) Tulkitse Maxwellin yhtälöt fysikaalisesti. Perustele huolella. (2p)
c) Miten Maxwellin yhtälöitä käytettäessä huomioidaan väliaine, jossa sähkömagneettista kenttää tarkastellaan? (1p)
d) Osoita, että varauksen säilymislaki on piilossa Maxwellin yhtälöissä. (1p)

5. Polaroimaton valo, jonka intensiteetti on I_0, läpäisee kaksi polarisaattoria, joiden päästösuuntien välinen kulma on α.
a) Kuinka suuri on valon intensiteetti ensimmäisen polarisaattorin jälkeen? (2p)
b) Miten asetat polarisaattoreiden väliin kolmannen polarisaattorin jotta saisit ulos mahdollisimman suuren intensiteetin? Mikä on tämä intensiteetti? (4p)

Vakioiden arvoja

Planckin vakio	$h = 6.6261 \cdot 10^{-34}$ Js
h/2π	$\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34}$ Js
valon nopeus tyhjiössä	$c = 2.9979 \cdot 10^{8}$ m/s
alkeisvaraus	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ C
tyhjiön permeabiliteetti	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2
tyhjiön permittiivisyys	$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ F/m
Boltzmannin vakio	$k = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J/K
elektronin lepomassa	$m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31}$ kg
protonin lepomassa	$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg
neutronin lepomassa	$m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27}$ kg
Stefan-Boltzmannin vakio	$\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)

Nabla sylinterikoordinaateissa

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Nabla pallokoordinaateissa

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{r} + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial \varphi^2}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial \varphi^2}$$

Integraaleja

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sin^3 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax$$

$$\int \cos^3 ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

$$\int x\sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

$$\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2\sin ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2\cos ax + 2ax\sin ax - a^2x^2\cos ax)$$

$$\int x^2\cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}(-2\sin ax + 2ax\cos ax + a^2x^2\sin ax)$$

$$\int x^n\sin ax\, dx = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$$

$$\int x^n\cos ax\, dx = \frac{1}{a}x^n\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx$$

$$\int x\sin^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x\cos^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x^2\sin^2(ax)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x\cos(2ax)}{4a^2} - \frac{(-1+2a^2x^2)\sin(2ax)}{8a^3}$$

Trigonometeriaa

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$

   $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \qquad \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$

2. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

   $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

   $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \qquad \cot(\alpha-\beta) = -\frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$

3. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

   $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

4. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

   $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

   $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

5. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

   $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

   $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

   $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

Vektorilaskentaa

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = \begin{vmatrix}\vec{A}\cdot\vec{C} & \vec{A}\cdot\vec{D}\\ \vec{B}\cdot\vec{C} & \vec{B}\cdot\vec{D}\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}(\psi\xi) = \xi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\xi$$

$$\vec{\nabla}\times(\psi\vec{A}) = \vec{\nabla}\psi\times\vec{A} + \psi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{A}) = \vec{\nabla}\psi\cdot\vec{A} + \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

$$\nabla\times(\nabla\psi) = 0$$