T-61.3015 / T.61.3010 DIGITAALINEN SIGNAALINKÄSITTELY JA SUODATUS

Tentti / 28.5.2012 / OS

1. **Monivalinta: Jokaisessa alla olevista vaihtoehdoista on 1-4 oikeaa vastausta, <u>valitse ainoastaan yksi vaihtoehto</u>. Vastausta ei tarvitse perustella.**

Oikea vastaus +1 p, väärä vastaus −1 p, ei vastausta 0 p. Tehtävän minimipistemäärä 0 p.

1.1 Kahden pisteen liukuvan keskiarvon suodatin:

(A) Suodattimen impulssivaste on äärettömän pituinen (IIR-suodatin)
(B) Suodattimen impulssivaste on $h[n] = 0.5(\delta[n] - \delta[n-1])$
(C) Suodatin vaimentaa signaalin nopeita muutoksia
(D) Suodatin voidaan toteuttaa yhdellä viive-elementillä

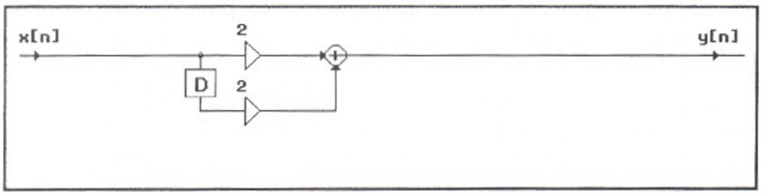
1.2 Suodattimen impulssivaste on $h[n] = (0.8)^{n+2}\,\mu[n+2]$

(A) Suodatin on kausaalinen
(B) Suodatin on stabiili
(C) Suodatin on IIR-suodatin
(D) Impulssivasteen kolme ensimmäistä termiä ovat: 1, 0.8 ja 0.64

1.3 Tarkastellaan sekvenssiä $x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$, missä osasekvenssien $x_i[n]$ perusjaksot ovat $N_1 = 8$, $N_2 = 10$ ja $N_3 = 20$. Mitä voidaan sanoa summasekvenssin $x[n]$ jaksollisuudesta?

(A) Ei ole olemassa perusjaksoa N_0
(B) Perusjakso on $N_0 = 4$
(C) Sekvenssi on jaksollinen jaksonpituudella $N = 8 \cdot 10 \cdot 20 = 1600$
(D) Perusjakso on näytteenottotaajuuden monikerta

1.4 Alla olevan kuvan mukaisen suodattimen impulssivaste $h[n]$ konvoloidaan tulosekvenssin $x[n] = 0.5^n\,\mu[n]$ kanssa



(A) Konvoluution tuloksena saatava lähtösekvenssi on äärellisen pituinen
(B) Konvoluutiota ei voida laskea, koska suodatin on epästabiili
(C) Konvoluutio tuottaa nollasta eroavia arvoja n:n arvosta $n = 0$ alkaen
(D) Konvoluution tulos on y[0] = 1, kun n = 0

1.5 Kompleksinen eksponentifunktio $e^{j\omega}$

(A) Piirtää yksikköympyrän, kun $\omega = [0 \ldots \pi]$
(B) Voidaan kirjoittaa muotoon $e^{j\omega} = \cos(\omega) + \sin(\omega)$
(C) Reaaliosa on kosinifunktio
(D) Funktion $e^{j\omega}$ arvo kiinteällä taajuuden ω arvolla on suodattimen taajuusvaste

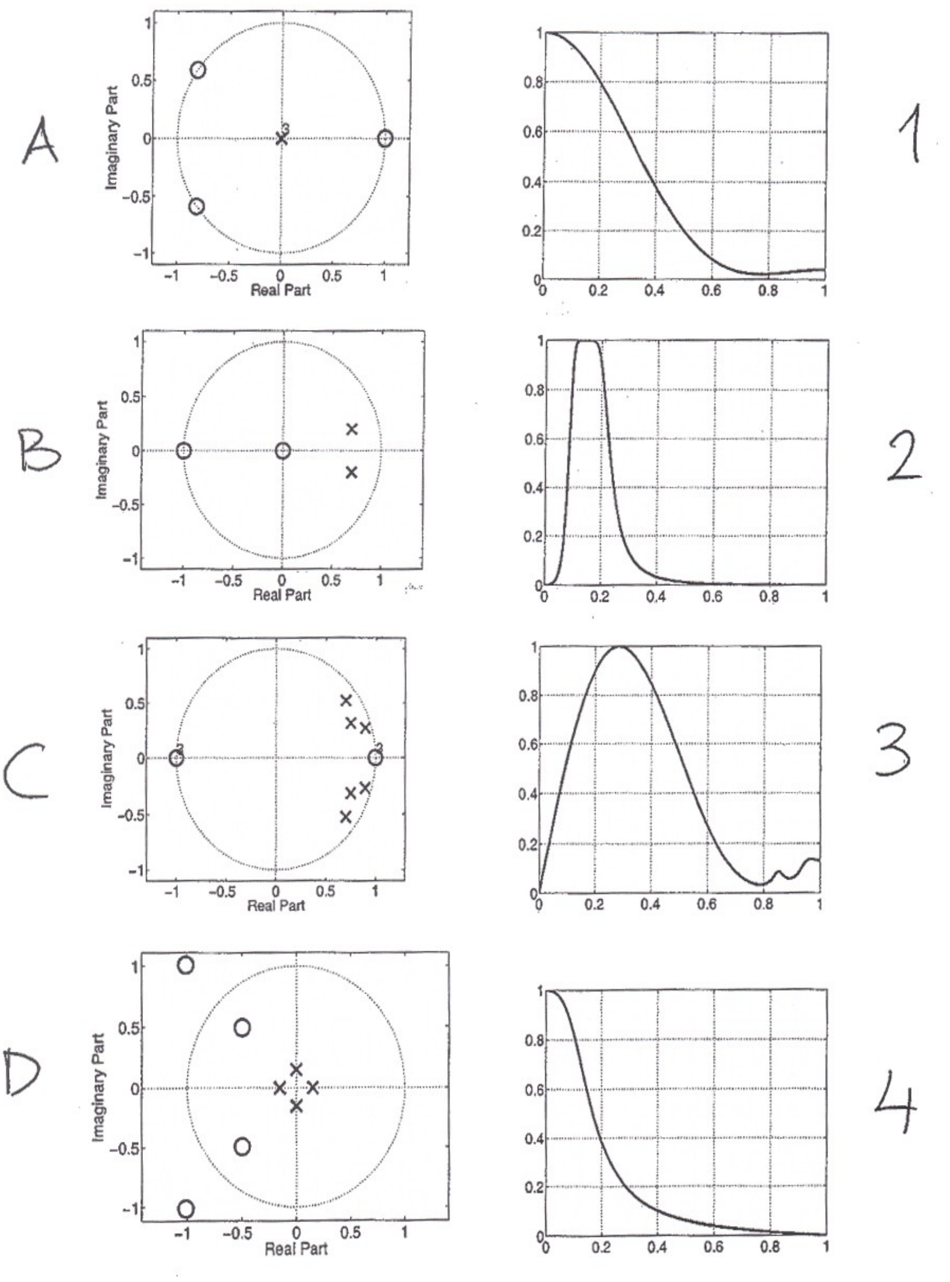
1.6 Sekvenssi $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta[n-1-2k] + \delta[n-3k])$

(A) Täyttää jaksollisuuden ehdon $x[n] = x[n+kN]$ perusjaksolla N_0=6
(B) Saa arvot: ..., $x[0]$=1, $x[1]$=1, $x[2]$=0, $x[3]$=2, $x[4]$=0, $x[5]$=1, $x[6]$=1, $x[7]$=1, $x[8]$=0, $x[9]$=2, $x[10]$=0, $x[11]$=1, $x[12]$=1, $x[13]$=1, $x[14]$=0, $x[15]$=2, ...
(C) Sekvenssin $x[n]$ arvo indeksin n arvolla 2011 on 2, ts. $x[2011]$=2
(D) Sekvenssi ei ole periodinen suurilla negatiivisilla indeksin n arvoilla

2. Napa-nollakuvioista (pole-zero plot/diagram) voidaan arvioida suodattimen amplitudivasteen käyttäytyminen.

Alla olevan kuvan vasemmassa sarakkeessa on napa-nollakuviot A ... D ja oikeassa sarakkeessa amplitudivasteet 1 ... 4. Amplitudivasteiden x-akselin skaala 0 ... 1 vastaa normalisoitua kulmataajuutta 0 ... p (taajuudet 0 ... fs/2).

Yhdistä kukin napa-nollakuvio vastaavaan amplitudivasteeseen, mikäli sellainen kuvista 1 ... 4 löytyy.) Kaikilla napa-nollakuvioilla ei välttämättä ole vastaavuutta amplitudivasteiden A ... D joukossa.)



(6p)

3. (a) Mikä on sekvenssin $x[n]=e^{j(3n/7+\pi/3)}$ jakso ? (2p)

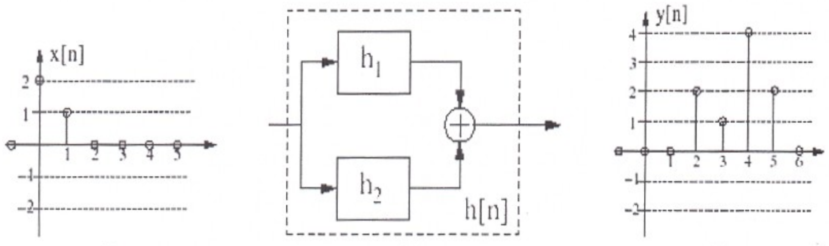
(b) Laske sekvenssien $h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$ ja $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]$ konvoluutio, $y[n]=h[n]*x[n]$. Minkälaista suodatinta (alipäästö, ylipäästö, kaistanpäästö tai kaistanesto) $h[n]$:n kuvaama impulssivaste edustaa? (2p)

(c) Laske suodattimen $H(z)=\frac{1}{2}(1+z^{-4})$ taajuusvaste. Hahmottele suodattimen amplitudivaste ($|H(e^{j\omega})|$. (2p)

4. Tarkastellaan alla olevassa kuvassa olevaa diskreettiaikaista lineaarista ja aikainvarianttia järjestelmää. Se koostuu kahdesta komponentista, jotka on yhdistetty kuvan (b) mukaisesti. Osajärjestelmän h_1 impulssivaste on $h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$. Osajärjestelmän h_2 impulssivaste, $h_2[n]$, on tuntematon.
Kun järjestelmään syötetään alla vasemmalla olevan kuvan (a) mukainen sekvenssi $x[n]$, saadaan ulostulona oikealla olevan kuvan (c) mukainen vaste $y[n]$, missä

$$x[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]$$

$$y[n]=2\delta[n-2]+\delta[n-3]+4\delta[n-4]+2\delta[n-5]$$



(a) (b) (c)

(a) Laske osasysteemin h_1 ulostulo: $y_1[n]=h_1[n]*x[n]$

(b) Määrää koko impulssivasteen $h[n]$ kaksi ensimmäistä arvoa: $h[0]$ ja $h[1]$

(c) Määrää toisen osajärjestelmän h_2 impulssivaste $h_2[n]$

(d) Mikä on järjestelmän ulostulo $y_m[n]$, kun syötteenä on $x_m[n]=-x[n-1]$? Piirrä ulostulosekvenssi.

(6 p)

5. Kvantisointivirhettä voidaan kompensoida ns. virheen takaisinkytkennän (error feedback) avulla. Menetelmässä suodatettu virhesignaali lisätään kvantisointia (Q[.]) edeltävään haaraan suodatinrakenteessa. Ilman takaisinkytkentää virhesignaali $e[n]$ systeemissä on puhdas kvantisointivirhe, ts. $e[n]=y[n]-x[n]$; kompensoidussa piirissä virhesignaali on lähdön $y[n]$ ja kompensoidun tulosignaalin välinen erotus. Oheisessa kuvassa on toisen asteen error feedback -rakenne.

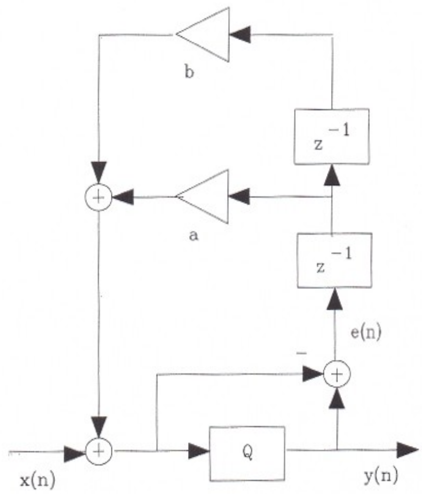
(a) Määrää rakenteen kohinasiirtofunktio $H_e(z)$

$$E_{tot}(z)=H_e(z)\,E(z)\,,$$

missä $E(z)$ on virheen $e[n]=Q[x[n]]-x[n]$ z-muunnos ja $E_{tot}(z)$ kokonaisvirheen $e_{tot}[n]=y[n]-x[n]$ z-muunnos.

(b) Määrää siirtofunktion $H_e(z)$ amplitudivaste, kun $a=2$ ja $b=1$.
Hahmottele amplitudivasteen kuvaaja.
Miten kohinan spektri muuttuu?

(c) Mitä tapahtuu virheen varianssille?



(6 p)

T-61.3015 DSP Table of formulas, spring 2012

Disclaimer! Notations, e.g., ω or Ω, may vary from book to book, or from exam paper to other.

DSP context, change between time (1st row) and frequency (2nd row) domain using Fourier / Z-transform.

input		impulse response		output signal
$x[n]$	$\rightarrow$	$\boxed{h[n]}$	$\rightarrow$	$y[n] = h[n] \circledast x[n]$
$\updownarrow$ F / Z		$\updownarrow$ F / Z		$\updownarrow$ F / Z
$X(z)$	$\rightarrow$	$\boxed{H(z)}$	$\rightarrow$	$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$
input		transfer function		output spectrum

Basic math stuff

Even and odd functions

$\mathcal{E}ven\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$, e.g., $\cos(x) = \cos(-x)$

$\mathcal{O}dd\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$, e.g., $\sin(x) = -\sin(-x)$

Roots of second-order polynomial

$ax^2 + bx + c = 0$, $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$

Logarithms, decibels

$\log\left((A \cdot B/C)^D\right) = D \cdot (\log A + \log B - \log C)$

$\log_a b = \log_c b / \log_c a$

decibels $10\log_{10}(H^2/H_0^2) = 20\log_{10}(H/H_0)$

$10\log_{10}(0.5) = 20\log_{10}(\sqrt{0.5}) \approx -3.01$ dB

$20\log_{10}(0.1) = -20$ dB, $20\log_{10}(0.01) = -40$ dB

Complex numbers, radii, angles, unit circle

$i \equiv j = \sqrt{-1} = -1/j$

$z = x + jy = r\,e^{j\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arctan(y/x) + n\pi$, $(n = 0$, if $x > 0, n = 1$, if $x < 0)$

$x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ (*Euler's formula*)

$\cos(\theta) = (1/2) \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$, $\sin(\theta) = (1/2j) \cdot (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$, $z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, $\angle(A \cdot B) = \angle A + \angle B$

$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta)$

$z_k = \sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{r\,e^{j\theta}} = |\sqrt[N]{r}|\,e^{j(\theta + 2\pi k)/N}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$

Trigonometric functions

$1^\circ = \pi/180$ radians ≈ 0.01745 rad, 1 rad $= 180^\circ/\pi \approx 57.30^\circ$

$\mathrm{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$

$\sin(\theta)/\theta \rightarrow 1$, when $\theta \rightarrow 0$; $\mathrm{sinc}(\theta) \rightarrow 1$, when $\theta \rightarrow 0$

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ (Taylor)

$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ (Taylor)

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(\theta)$	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5
θ	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$-\pi/2$
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1
$\cos(\theta)$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0

$\pi \approx 3.1416$, $\sqrt{3}/2 \approx 0.8660$, $\sqrt{2}/2 \approx 0.7071$

Geometric series

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, $|a| < 1$

$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a}$, $|a| < 1$

Continuous-time unit step and unit impulse functions

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\delta_\Delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_\Delta(t)$, $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$ (Dirac's delta)

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$

$\int_{\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)\,\mathrm{d}t = x(t_0)$

In DSP notation $2\pi\delta(t)$ is computed $2\pi\int\delta(t) \cdot 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$, when $t = 0$, and $= 0$ elsewhere.

Discrete-time unit impulse and unit step functions

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Sequence $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$. E.g.: $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1] = \{2, \underline{1}, -1\}$, $x[-1] = 2$, $x[0] = 1$, $x[1] = -1$.

Periodic signals

$\exists T \in \mathbb{R}_+ : x(t) = x(t + T), \forall t;\ t, T \in \mathbb{R}$

$\exists N \in \mathbb{Z}_+ : x[n] = x[n + N], \forall n;\ n, N \in \mathbb{Z}$

Fundamental period T_0, N_0 is the smallest $T > 0$, $N > 0$.

E.g.: $\cos(\omega n) = \cos(\omega n + 2\pi k)$, $e^{j(\omega n)} = e^{j(\omega n + 2\pi k)}$

Convolution

Convolution is commutative, associative and distributive.

$y(t) = h(t) \circledast x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$

$y[n] = h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$

$y_C[n] = h[n] \textcircled{N}\, x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[< n - k >_N]$

Correlation

$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-l] = x[l] \circledast y[-l]$

$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n-l]$

Mean and variance of random signal

$m_X = \mathrm{E}[X] = \int x p_X(x)dx$

$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x)dx = \mathrm{E}[X^2] - m_X^2$

Frequencies, angular frequencies, periods

Here f_T (sometimes f_s) is the sampling frequency.

Frequency f, $[f] = \mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$.

Angular frequency $\Omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $[\Omega] = \mathrm{rad/s}$ (analog).

Normalized angular frequency $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_T$, $[\omega] =$ rad/sample (digital).

Normalized frequency in Matlab $f_{MATLAB} = 2f/f_T$, $[f_{MATLAB}]$ $= 1$/sample.

Sampling of $x_a(t)$ by sampling frequency f_T

$x_p[n] = x_a(nT) = x_a(n/f_T)$

$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_T))$

Integral transforms. Properties

Here all integral transforms share some basic properties. Examples given with CTFT, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$, and $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra. a and b are constants.

Linearity. All transforms are linear.

$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

Time-shifting. There is a kernel term in transform, e.g.,

$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$

Frequency-shifting. There is a kernel term in signal e.g.,

$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_k)})$

Conjugate symmetry $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$, then $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$, $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$, $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and even, then $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ and even. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and odd, then $X(e^{j\omega})$ purely $\in \mathbb{C}$ and odd.

Time reversal. Transform variable is reversed, e.g.,

$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

Differentiation. In time and frequency domain, e.g.,

$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$, $nx[n] \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(e^{j\omega})$

Duality. Convolution property convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain $x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ and multipication property, vice versa, $x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega - \theta)})\,\mathrm{d}\theta$

Parseval's relation. Energy in signal and spectral components: $\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,\mathrm{d}\omega$

Fourier series of continuous-time periodic signals [cont. signal $\leftrightarrow$ discrete frequency]

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{jk\Omega_0 t}$ (synthesis)

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}\,\mathrm{d}t$ (analysis)

$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{jk\Omega_0 t_0}$

$e^{jM\Omega_0 t}x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$

$\int_T x_a(\tau)x_b(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow Ta_k b_k$

$x_a(t)x_b(t) \leftrightarrow \sum_l a_l b_{k-l}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \leftrightarrow jk\Omega_0 a_k$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT) [cont. signal $\leftrightarrow$ cont. frequency]

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, \mathrm{d}\Omega$ (synthesis)
$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, \mathrm{d}t$ (analysis)
$x(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k} X(j\Omega)$
$e^{j\Omega_k t} x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_k))$
$x_a(t) \circledast x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega) X_b(j\Omega)$
$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) \circledast X_b(j\Omega)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$
$t x(t) \leftrightarrow j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega} X(j\Omega)$
$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$
$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$
$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| < W \\ 0, |\Omega| > W \end{cases}$
$\delta(t) \leftrightarrow 1$
$\delta(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}$
$e^{-at}\mu(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\Omega}$, where $\mathcal{R}eal\{a\} > 0$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT) [discrete signal $\leftrightarrow$ cont. frequency]
$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, \mathrm{d}\omega$ (synthesis)
$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$, periodic with 2π (analysis)
$a\, x[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_k n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_k)})$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$
$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)})\, \mathrm{d}\theta$
$n x[n] \leftrightarrow j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$
$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$
$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)]$
$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$
$x[n] = \begin{cases} 1, |n| \le N_1 \\ 0, |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1 + 0.5))}{\sin(\omega/2)}$
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases}$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$
$a\, \delta[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega}$
$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$, $|a| < 1$

N-point Discrete Fourier-transform (DFT) [discrete signal $\leftrightarrow$ discrete frequency, "discrete-time Fourier series"]
Connection to DTFT: $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega = 2\pi k/N}$
$W_N = e^{-j2\pi/N}$
$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$, $0 \le n \le N-1$ (synthesis)
$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$, $0 \le k \le N-1$ (analysis)
$x[< n - n_0 >_N] \leftrightarrow W_N^{-kn_0} X[k]$
$W_N^{-nk_0} x[n] \leftrightarrow X[< k - k_0 >_N]$
$y_C[n] = h[n] \circledcirc x[n] \leftrightarrow H[k] \cdot X[k] = Y[k]$

Laplace transform:
Convergence with a certain ROC (region of convergence). Connection to continuous-time Fourier-transform: $s = j\Omega$
$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st}\, \mathrm{d}s$ (synthesis)
$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$ (analysis)

z-transform:
Convergence with a certain ROC (region of convergence). Connection to discrete-time Fourier-transform: $z = e^{j\omega}$
$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$, C in ROC of $X(z)$ (synthesis)
$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ (analysis)
$a\, x[n-k] \leftrightarrow a\, z^{-k} X(z)$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$, ROC all z
$a\, \delta[n-k] \leftrightarrow a\, z^{-k}$, all z, except 0 ($k > 0$) or ∞ ($k < 0$)
$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}$, $|z| > 1$
$-\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}$, $|z| < 1$
$a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}}$, $|z| > |a|$
$n a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$, $|z| > |a|$
$(n+1) a^n \mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1 - a z^{-1})^2}$, $|z| > |a|$
$r^n \cos(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{1 - r\cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$, $|z| > |r|$
$r^n \sin(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{r\sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$, $|z| > |r|$

LTI filter analysis
Stability $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$; unit cirle belongs to ROC
Causality $h[n] = 0, n < 0$; ∞ belongs to ROC
Unit step response $s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$
Causal transfer function of order $\max\{M, N\}$
$H(z) = B(z)/A(z) = K \cdot \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = G \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M}(1 - d_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - p_n z^{-1})}$
where zeros d_m: $B(z) = 0$; *and poles* p_n: $A(z) = 0$
Frequency response $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$
Frequency response vs $H(z)$ *vs* $H[k]$
$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z = e^{j\omega}}$; $H[k] = H(e^{j\omega})|_{\omega = 2\pi k/N}$
Magnitude response, phase response $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|\, e^{j\angle H(e^{j\omega})}$
Group delay $\tau(\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\angle H(e^{j\omega})$
Four types of linear-phase FIR filters, $h[n] = h[N-1-n]$ (even/odd symmetric), or $h[n] = -h[N-1-n]$ (e/o antis.). Zeros symmetric w.r.t. unit circle: $r\, e^{\pm j\theta}$ and $(1/r)\, e^{\mp j\theta}$.
Important *transform pairs and properties*:
$a\, \delta[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega} \leftrightarrow a\, z^{-k}$
$a^n \mu[n] \leftrightarrow 1/[1 - a\, e^{-j\omega}] \leftrightarrow 1/[1 - a\, z^{-1}]$
$a\, x[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}) \leftrightarrow a\, z^{-k} X(z)$
$K \cdot \sum_{m=M_1}^{M_2} b_m x[n-m] = \sum_{k=K_1}^{K_2} a_k y[n-k] \leftrightarrow \ldots$
$\ldots\ K \cdot \frac{\sum_{m=M_1}^{M_2} b_m z^{-m}}{\sum_{k=K_1}^{K_2} a_k z^{-k}} \leftrightarrow K \cdot \frac{\sum_{m=M_1}^{M_2} b_m e^{-jm\omega}}{\sum_{k=K_1}^{K_2} a_k e^{-jk\omega}}$
$y[n] = h[n] \circledast x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$
rectangle $\leftrightarrow$ sinc, sinc $\leftrightarrow$ rectangle

LTI filter design (synthesis)
Bilinear transform $H(z) = H(s)|_s$ and *prewarping*
$s = k \cdot (1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$, $k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$
$\Omega_{prewarp,c} = k \cdot \tan(\omega_c/2)$, $k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$
Spectral transformations, $\hat{\omega}_c$ desired cut-off
LP-LP $z^{-1} = (\hat{z}^{-1} - \alpha)/(1 - \alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha = \sin(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))/\sin(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))$
LP-HP $z^{-1} = -(\hat{z}^{-1} + \alpha)/(1 + \alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha = -\cos(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))/\cos(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))$
Windowed Fourier series method
$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \ge \omega_c \end{cases} \leftrightarrow h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{\omega_c n}{\pi})$
$h_{FIR}[n] = h_{ideal}[n] \cdot w[n]$
$H_{FIR}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{ideal}(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)})\, \mathrm{d}\theta$
Fixed window functions, order $N = 2M$, $-M \le n \le M$:
Rectangular $w[n] = 1$
Hamming $w[n] = 0.54 + 0.46\cos((2\pi n)/(2M))$
Hann $w[n] = 0.5 \cdot (1 + \cos((2\pi n)/(2M)))$
Blackman $w[n] = 0.42 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M})$
Bartlett $w[n] = 1 - (|n|/M)$

Implementation
Radix-2 DIT N-FFT butterfly equations, $L\{x[n]\} = N$
$\begin{cases} \Psi_{r+1}[\alpha] &= \Psi_r[\alpha] + W_{N_r}^{l}\Psi_r[\beta] \\ \Psi_{r+1}[\beta] &= \Psi_r[\alpha] - W_{N_r}^{l}\Psi_r[\beta] \end{cases}$
Inputs $x[n]$ in bit-reversed order in Ψ_1, outputs in Ψ_R, $R = \log_2 N + 1$; levels $\Psi_1, \ldots, \Psi_R$, $r \in [1, R-1]$; multipliers $W_{N_r} = e^{-j2\pi/N_r}$, $N_r = 2^r$, $l \in [0, 2^{r-1} - 1]$.

Multirate systems
Upsampling (interpolation) with factor L, $\boxed{\uparrow L}$
$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ x_u[n] = 0, \text{ otherwise} \end{cases}$
$X_u(z) = X(z^L)$, $X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$
Downsampling (decimation) with factor M, $\boxed{\downarrow M}$
$x_d[n] = x[nM]$
$X_d(z) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{-k})$,
$X_d(e^{j\omega}) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi k)/M})$