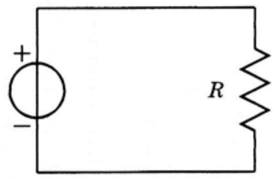
TASKULASKIN SALLITTU, EI APUKIRJALLISUUTTA.

Laske kaikki neljä tehtävää eri papereille!!

1. (a) Miten *kenttäteoria* selittää tehon siirtymisen jännitelähteestä kuormavastukseen (esim. hehkulamppu) oheisessa tasavirtapiirissä. Oletetaan johtimien olevan ideaalisia, eli niissä ei synny mitään jännitehäviötä. Voit täydentää vastaustasi myös piirtämällä.



(b) Tyhjiössä etenevän aikaharmonisen tasoaallon magneettikenttä on muotoa

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_0(1+\mathrm{j})\mathbf{u}_x e^{-\mathrm{j}kz}$$

- Laske aallon sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$
- Määritä aallon polarisaatio (lineaarinen/elliptinen/ympyräpolarisaatio ja mahdollinen kätisyys)

2. Tarkastele radioaallon tunkeutumista märkään maahan. Olkoon maan suhteellinen permittiivisyys $\epsilon_r = 3 - \mathrm{j}\cdot 5$ ja aallon värähtelytaajuus 300 MHz. Maan voi olettaa epämagneettiseksi, eli $\mu = \mu_0$.

(a) Kuinka monta desibeliä on aallon vaimennus metrin matkalla?

(b) Koska imaginaariosa on kohtalaisen suuri, voisi tulla houkutus approksimoida märkää maata hyvänä johteena. Tällöin saadaan tunkeutumissyvyydeksi $\delta \approx 101$ mm. Jos näin arvioidaan, kuinka monen prosentin virhe tulee tehdyksi?

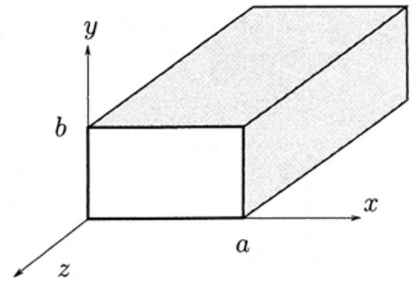
3. Suorakulmaisen z-suuntaisen aaltoputken poikkipinta on $a \times b$. Sen TE_{20}-muodon kompleksimuotoinen sähkökenttävektorifunktio on

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_y E_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-\mathrm{j}\beta z}$$

(a) Laske magneettikenttä $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

(b) Laske ajasta riippuvat reaaliset kentät $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ja $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$.

(c) Laske ajasta riippuva reaalinen Poyntingin vektori $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$.

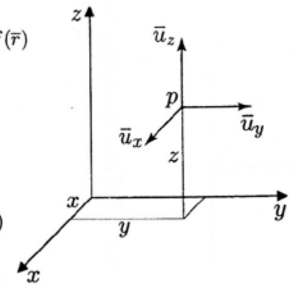


4. (a) Selitä sanallisesti seuraavat antenneihin ja radioaaltoihin liittyvät käsitteet. (Pelkkä matemaattinen kaava ei riitä.)
   - antennin suuntaavuus D
   - antennin säteilyhyötysuhde η_s
   - vapaan tilan vaimennus

(b) Aalto-yliopiston opiskelijat ovat laukaisseet oman kaukokartoitussatelliittinsa Maata kiertävälle radalle. Satelliitti lähettää Espoon Otaniemessä sijaitsevalle maa-asemalle dataa taajuudella f = 2,4 GHz. Satelliitissa on mikroliuskatekniikalla toteutettu lähetysantenni, joka säteilemä lähetysteho on $P_\mathrm{l} = 1$ W ja vahvistus maa-aseman suuntaan $G_\mathrm{l} = 4$ dB. Otaniemessä dataa vastaanotetaan järeällä parabolisella lautasantennilla, jonka apertuurin halkaisija on $d = 5$ m ja apertuurihyötysuhde $\eta_\mathrm{a} = 75$ %. Jotta datayhteys onnistuu, on vastaanotetun tehon oltava vähintään $P_\mathrm{v} = 1\cdot 10^{-12}$ W. Mikä tällöin on suurin mahdollinen etäisyys r satelliitin ja maa-aseman välillä?
Vihje: Yhteys antennin vahvistuksen ja sen apertuurin efektiivisen pinta-alan eli *sieppauspinnan* A_e välillähän on $A_\mathrm{e} = G\lambda^2/(4\pi)$.

Nablaoperaatiot

Karteesinen koordinaatisto



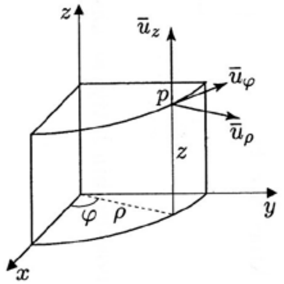
$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Sylinterikoordinaatisto



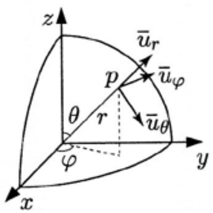
$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho \overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Pallokoordinaatisto



$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r\sin\theta \overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z,$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r \sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right), \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$\rho = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta,$

$r = \sqrt{\rho^2+z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\, dx + \overline{u}_y\, dy + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\, dy\, dz$

$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\, dx\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\, dx\, dy$

$dV = dx\, dy\, dz$

Sylinterikoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\, d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\, d\varphi + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\, d\varphi\, dz$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\, d\rho\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\, d\rho\, d\varphi$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

Pallokoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\, dr + \overline{u}_\theta r\, d\theta + \overline{u}_\varphi r \sin\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r \sin\theta\, dr\, d\varphi$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\, dr\, d\theta$

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Gaussin lause $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\displaystyle\int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$